FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

FGV Management

# Matemática Financeira

**Paulo Lamosa Berger**
alunos@plberger.com.br

FGV management

Realização
Fundação Getulio Vargas

**FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS**

**PRESIDENTE**
Carlos Ivan Simonsen Leal

**VICE-PRESIDENTES**
Francisco Oswaldo Neves Dornelles
Marcos Cintra Cavalcanti de Alburquerque
Sergio Franklin Quintella

ESCOLAS FGV

**EAESP**
Diretor Fernando S. Meirelles
**EBAPE**
Diretor Bianor Scelza Cavalcanti
**EESP**
Diretor Yoshiaki Nakano
**EPGE**
Diretor Renato Fragelli Cardoso
**Direito GV**
Diretor Ary Oswaldo Mattos Filho
**Direito Rio**
Diretor Joaquim Falcão

***INSTITUTOS FGV***

**CPDOC**
Diretor Celso Corrêa Pinto de Castro
**IBRE**
Diretor Luiz Guilherme Schymura de Oliveira
IDE
Diretor Clovis de Faro
PROJETOS
Diretor Cesar Cunha Campos

ESTRUTURA DO IDE

FGV MANAGEMENT
Diretor Executivo Ricardo Spinelli de Carvalho

FGV ONLINE
Diretor Executivo Carlos Longo

QUALIDADE E INTELIGÊNCIA DE NEGÓCIOS
Diretor Executivo Antônio de Araújo Freitas Junior

CURSOS CORPORATIVOS
Diretor Executivo Antônio Carlos Porto Gonçalves

**ESTRUTURA DO FGV MANAGEMENT**

**Superintendentes**
Djalma Rodrigues Teixeira Filho (Brasil)
Maria do Socorro Macedo Vieira de Carvalho (Brasília)
Paulo Mattos de Lemos (Rio de Janeiro e São Paulo)
Silvio Roberto Badenes de Gouvêa (Brasil)

Coordenadores Especiais
Fernando Salgado
Marcos de Andrade Reis Villela
Pedro Carvalho Mello

A sua opinião é muito importante para nós

*Fale Conosco*
*Central de Qualidade – FGV Management*
✉ **ouvidoria@fgv.br**

# Sumário

# 1. Programa da disciplina

## 1.1 Ementa

Juros simples e compostos. Taxas de juros (reais, efetivas, nominais e equivalentes). Equivalência de Capitais. Descontos Bancários. Séries Uniformes de Pagamentos. Séries Perpétuas. Amortização de Empréstimos. Formação Básica da Taxa de Juros. Taxa over. Cálculo de preço e rentabilidade de LTN, CDB Prefixado e Pós-fixado, Valor presente líquido. Taxa Interna de Retorno. Taxa de atratividade (custo de oportunidade).

## 1.2 Carga horária total

36 horas/aula

## 1.3 Objetivo

Formar profissionais para atuar na área financeira de empresas.

## 1.4 Metodologia

Aulas expositivas com resolução de exercícios.

# 1.5 Critérios de avaliação

Serão aprovados os alunos que atenderem aos requisitos de freqüência às aulas e obtiverem média final igual ou superior a 7,0 (sete).

# 1.6 Bibliografia recomendada

Ross, Westerfield e Jaffe, Administração Financeira. - Editora Atlas - 3ª. Edição

Assef Neto, Alexandre, Matemática Financeira e suas Aplicações. Ed. Atlas - 9ª. Edição

# 1.7 Curriculum Resumido do Professor

**Paulo Lamosa Berger**
Mestre em Economia pela UCAM
Chefe da Divisão de Operações do Departamento de Operações de Mercado Aberto do Banco Central do Brasil
Atividade docente desde 1996 na área de finanças e economia.
Autor do livro: Mercado de Renda Fixa no Brasil

# 2. Definições Básicas

## *2.1 - Trabalho*

## *2.2 - Salário*

## *2.3 – Ativo*

## *2.4 – Ativo Fixo*

## *2.5 - Aluguel*

## *2.6 - Capital*

## *2.7 - Juro*

## *2.8 - Empresa*

## *2.9 – Empresário*

## *2.10 - Lucro*

***2.11 - Fatores de Produção - Trabalho, ativo fixo (imóvel), capital e empresário.***

## *2.12 - Taxa*

## *2.13 - Capitalizar*

## *2.14 -Descapitalizar*

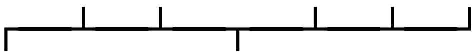
## *2.15 - Taxa de Juros*

## *2.16 - Câmbio*

## *2.17 - Taxa de Câmbio*

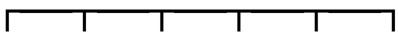
## *2.18 - Fluxo (ato de fluir)*

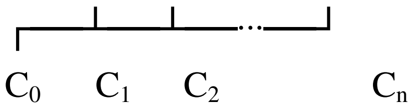
## *2.19 - Fluxo de Caixa*

Exemplo: 

Sendo:

1)  = recebimentos ou entradas de caixa.

2)  = pagamentos ou saídas de caixa




Terminologia:

$C_0$ = Capital no momento zero (início)

$C_1$ = Capital no momento 1 que corresponde ao final do período 1 e início do período 2.

$C_2$ = Capital no momento 2 que corresponde ao final do período 2 e início do período 3.

$C_n$ = Capital no momento n que corresponde ao final do período n.

PV = Valor Presente    FV = Valor Futuro

P = Principal    M = Montante

## *2.20 - Valor Atual ou Valor Presente*

a) Qual o valor atual do fluxo acima no momento 2?

b) Qual o valor atual do fluxo acima no momento 0?

c) Qual o valor atual do fluxo acima no momento n?

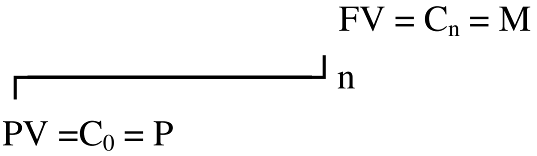
Exemplo 2: Descapitalizando.

Em se tratando de um fluxo de caixa onde há uma aplicação de recursos financeiros e uma seqüência de receitas previstas, o valor presente numa data específica, em qualquer momento do tempo, será dado pelo somatório dos valores presentes das receitas futuras, previstas a partir daquela data, descontados por uma determinada taxa de juros.

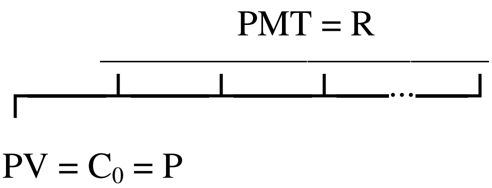
## *2.21 - Valor Futuro*

# 3. Convenções

## *3.1 - Investimento Simples com Resgate Único*

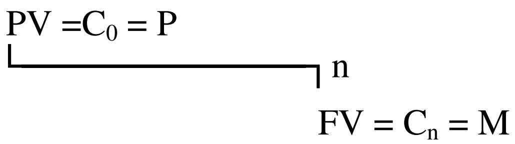



## *3.2 - Investimento com Resgate Periódico*

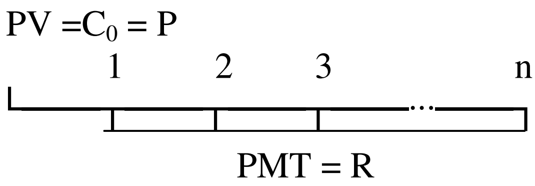



Sendo PMT = R = mensalidades ou prestações ou fluxo igual de recebimentos.

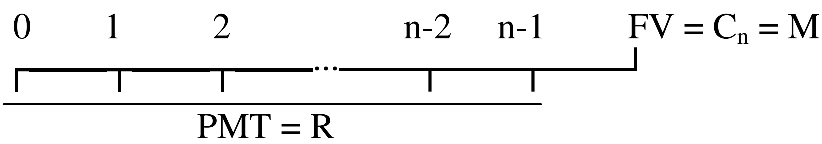
## *3.3 - Empréstimo Simples com Pagamento Único*




## *3.4 - Empréstimo com Pagamento Periódico*




## *3.5 - Poupança Programada com Resgate Único*



# 4. Revisão de Matemática

## *4.1 - Equações do 1º. Grau*

1) $2x + 5 = 9$

2) $2x - 5 = 7$

## *4.2 – Taxa de Juros*

1) $2\% = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$

2% = expressão na forma percentual
0,02 = expressão na forma unitária

**2)** $\mathbf{1{,}02} = \left(1 + \dfrac{x}{100}\right) \Rightarrow$

$$1{,}02 - 1 = \frac{x}{100}$$
$$x = 0{,}02x100$$
$$x = 2\%$$

O que representa 1,02?

Exemplo:

$$100\left(1+\frac{2}{100}\right)=100x1{,}02=102$$

Então, 102 = 100 (principal) + 2 (juros) = 102 (montante).

3) As operações envolvendo taxas de juros, em certos casos, se fundamentam nos princípios de potência e radiciação da seguinte forma:

## *4.3 - Potência e Radiciação (juros compostos)*

a) Potência – usada no processo de acumulação.

Suponha que desejo acumular a taxa de 2% a.m. por 3 meses, calculando a taxa do trimestre.

$i_m$= 2% = 2 por cento ao mês

$$\left(1+\frac{2}{100}\right)^3=1{,}061208=\left(1+\frac{i_T}{100}\right)$$

$$i_T=[1{,}061208-1]100=6{,}1208\%$$

$$i_T=6{,}1208\%\ \text{ ao trimestre}$$

Isto representa um fator acumulado trimestral ou uma taxa de juros acumulada no trimestre. Assim, para acumular 2% a.m. sobre certo capital por 3 meses, tanto faz utilizar $(1{,}02)^3$ ou 1,061208.

b) Radiciação – usada no processo de desacumulação.

Suponha que desejo desacumular a taxa trimestral de 6,1208%, calculando a taxa mensal.

$$\left(1+\frac{6{,}1208}{100}\right)^{\frac{1}{3}}=1{,}02=2\%\text{a.m.}$$

Desse modo, posso obter a taxa mensal ou o fator mensal que acumulado por 3 meses resultará no fator de 1,061208 ou acumulado na taxa acumulada no trimestre de 6,1208%.

Então, se estou trabalhando em bases mensais e tenho uma taxa trimestral de 6,12078% e quero obter uma taxa equivalente a esse para o período de 6 meses, ou seja, transformar a taxa trimestral em taxa semestral, devo fazer:

$(1{,}061208)^{\frac{6}{3}}$ ; ou seja,

$\left[(1{,}061208)^{\frac{1}{3}}\right]^{6}$ $\Rightarrow$ a expressão dentro do colchete mostra que estou desacumulando a taxa trimestral, transformando-a em taxa mensal. O passo seguinte é acumular a taxa mensal no período semestral.

Então,

$$(1{,}061208)^{\frac{6}{3}}=1{,}12616242\cong 12{,}62\%\text{a.s.},$$

tudo com base mensal de 2%.

**Regras de Potência**

1) $x.x = x^2$

2) $y.y.y = y^3$

3) $x^2.x = x^{(2+1)} = x^3$

4) $y^5 / y^2 = y^{(5-2)} = y^3$

5) $x^3 / x^5 = x^{(3-5)} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

## Exemplos:

1) $x^2 = 16$

2) $x^2 = 16$

## Usando a HP-12C

1) Para somar digite a primeira parcela e tecle <ENTER>. Digite a segunda parcela e por fim aperte a tecla de somar <+>.

Todas as 4 operações fundamentais <+>, <->, <x>, <÷> devem respeitar esta seqüência:

Exemplo:

| **CÁLCULO** | **OPERAÇÃO** | **VISOR** |
|---|---|---|
| 2 + 3 = 5 | <2> <ENTER> <3> <+> | 5,00 |
| 2 – 3 = -1 | <2> <ENTER> <3> <-> | -1,00 |
| 2 x 3 = 6 | <2> <ENTER> <3> <X> | 6,00 |
| 2 ÷ 3 = 0,67 | <2> <ENTER> <3> <÷> | 0,67 |

2) Para elevar uma potência inteira, digite o valor da base, tecle enter, digite o valor da potência e, em seguida tecle <$y^x$>

| CÁLCULO | OPERAÇÃO | VISOR |
|---|---|---|
| $2^2 = 4$ | <2> <ENTER> <2> <$y^x$> | 4,00 |
| $2^3 = 8$ | <2> <ENTER> <3> <$y^x$> | 8,00 |
| $3^5 = 243$ | <3> <ENTER> <5> <$y^x$> | 243 |
| $1,5^4 = 5,06$ | <1,5> <ENTER> <4> <$y^x$> | 5,06 |
| $0,5^2 = 0,25$ | <0,5> <ENTER> <2> <$y^x$> | 0,25 |
| $2^{-3} = 0,25$ | <2> <ENTER> <3> <CHS> <$Y^x$> | 0,125 |

**Em se tratando de potência negativa, use a função CHS (change signal) após digitar o número.**

3) Para calcular uma potência fracionária, digite o valor da base, tecle ENTER, digite o valor do denominador, tecle <1/x>, em seguida tecle <$y^x$>, então digite o valor do numerador e tecle <$y^x$>.

Exemplo:

| CÁLCULO | OPERAÇÃO | VISOR |
|---|---|---|
| $2^{3/5}$ | <2> <ENTER> <5> <1/x> <$y^x$> <3> <$y^x$> | 1,52 |
| $2^{1/4}$ | <2> <ENTER> <4> <1/x> <$y^x$> | 1,19 |
| $3^{5/4}$ | <3> <ENTER> <4> <1/x> <$y^x$> <5> <$y^x$> | 3,95 |
| $1,5^{4/3}$ | <1,5> <ENTER> <3> <1/x> <$y^x$> <4> <$y^x$> | 1,72 |
| $0,5^{2/3}$ | <0,5> <ENTER> <3> <1/x> <$y^x$> <2> <$y^x$> | 0,63 |

Outro modo semelhante:

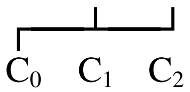
| CÁLCULO | OPERAÇÃO | VISOR |
|---|---|---|
| $2^{3/5}$ | <2> <ENTER> <3> <ENTER> <5> <÷> <$y^x$> | 1,52 |
| $2^{1/4}$ | <2> <ENTER> <1> <ENTER <4> <÷> <$y^x$> | 1,19 |
| $3^{5/4}$ | <3> <ENTER> <5> <ENTER> <4> <÷> <$y^x$> | 3,95 |
| $1,5^{4/3}$ | <1,5> <ENTER> <4> <ENTER> <3> <÷> <$y^x$> | 1,72 |
| $0,5^{2/3}$ | <0,5> <ENTER> <2> <ENTER> <3> <÷> <$y^x$> | 0,63 |

# 5. Regimes de Capitalização

Processos de incorporação dos juros ao capital. Neste programa usaremos dois processos: Juros Simples(JS) e Juros Compostos (JC)

## *5.1 – Juros Simples*

Na incorporação a juros simples, a taxa é aplicada sempre sobre o capital inicial, independentemente do período em que se esteja.




**Suponha:**

$i = 10\%$

$C_0 = 100$

$C_1 = C_0 + i \times C_0$

$C_1 = 100 + 0{,}1 \times 100$

$C_1 = 110$

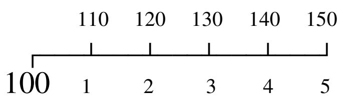
$C_2 = C_1 + i \times C_0$

$C_2 = 110 + 0{,}1 \times 100$

$C_2 = 120$

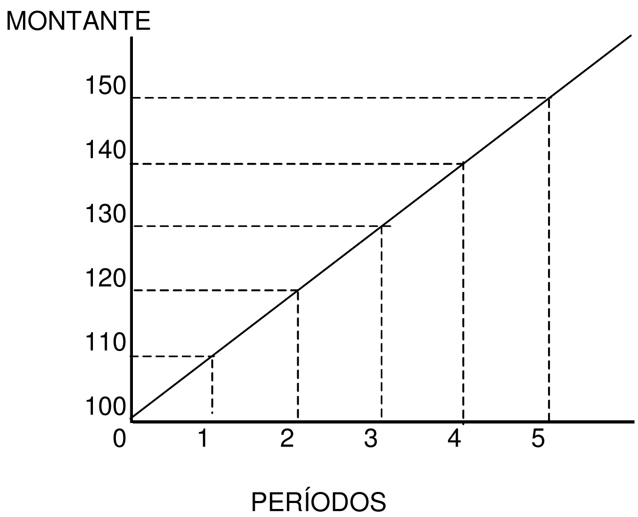
**TABELA DE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS SIMPLES**

| PERÍODO | CAPITAL NO INÍCIO DO PERÍODO | JUROS RELATIVOS AO PERÍODO 10% | MONTANTE NO FINAL DO PERÍODO |
|---|---|---|---|
| 1 | 100,00 | 100 X 10/100 = 10 | 110,00 |
| 2 | 110,00 | 100 X 10/100 = 10 | 120,00 |
| 3 | 120,00 | 100 X 10/100 = 10 | 130,00 |
| 4 | 130,00 | 100 X 10/100 = 10 | 140,00 |
| 5 | 140,00 | 100 X 10/100 = 10 | 150,00 |



Conclusões:
- Não há capitalização de juros sobre juros
- Montante varia linearmente no tempo
- Os juros incorporados a cada período de capitalização são constantes.

**Gráfico da Capitalização a Juros Simples**




## *5.1.1 – Formulação de Juros Simples*

Terminologia:
C = Capital
$C_0$ = Capital no momento zero, ou seja, capital inicial
$C_1$ = Capital acumulado após a primeira capitalização
$C_2$ = Capital acumulado após a segunda capitalização
.
.
$C_n$ = Capital acumulado após a enésima capitalização
i = taxa de juros expressa em porcentagem (10%) ou na forma unitária (0,10)
n = número de períodos
$J_k$ = juro periódico gerado no período k
J = somatório dos juros periódicos = $J = \sum_{k=1}^{n} J_k$

### 5.1.2 – Cálculo da Taxa

$$J_k = i.C_0 \Rightarrow i = \frac{J_k}{C_0}$$

### 5.1.3 – Cálculo dos Juros

$$J = n.J_k = n.i.C_0$$

### 5.1.4 – Cálculo do Montante

$$C_1 = C_0 + i.C_0 = C_0(1+i)$$
$$C_2 = C_1 + i.C_0 = C_0(1+i) + i.C_0 = C_0 + i.C_0 + i.C_0 =$$
$$C_2 = C_0(1+2i)$$
$$C_3 = C_2 + i.C_0 = C_0(1+2i) + 1.C_0 = C_0 + 2i.C_0 + i.C_0$$
$$C_3 = C_0(1+3i)$$
.
.
$$C_n = C_0(1+n.i)$$

### 5.1.5 – Cálculo do Capital Inicial

$$C_n = C_0(1+n.i) \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{1+n.i}$$

### 5.1.6 – Cálculo da Taxa de Juros

$$C_n = C_0(1+n.i) \qquad \frac{C_n}{C_0} - 1 = n.i$$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+n.i) \qquad i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}$$

## *5.1.7 – Cálculo do Número de Períodos*

$$C_n = C_0(1 + n.i)$$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + n.i)$$

$$n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}$$

## *5.1.8 – Juros Simples X Progressão Aritmética*

Ex.: 2 6 10 14 18.......K
$a_1$ $a_2$ $a_3$ $a_4$ $a_5$ $a_k$

Em toda PA, $a_k - a_{k-1} = R$ (razão), logo

$$\mathbf{a_k = a_{k-1} + R}$$

Soma dos termos de uma PA
$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + R$
$a_3 = a_2 + R = a_1 + R + R = a_1 + 2R$
$a_4 = a_3 + R = a_1 + 2R + R = a_1 + 3R$
.
.
$a_{k-1} = a_{k-2} + R = a_1 + (k - 2)R$
$a_k = a_{k-1} + R = a_1 + (k - 1)R$

Demonstração:

2 = 2
6 = 2 + 4
10 = 6 + 4
14 = 10 + 4
18 = 14 + 4
18 = 2 + 4x4 = 18

Exemplos:

1) Um investidor aplicou R$ 20.000,00 à taxa de 10% a.m. (JS). Calcule o montante no final do primeiro mês e do quinto mês.

$$C_n = C_0(1+n.i)$$
$$C_1 = C_0(1+1x0{,}1) = 20.000(1+0{,}1) = 22.000$$
$$C_5 = C_0(1+5x01) = 20.000(1{,}5) = 30.000$$

2) Deduza a fórmula do montante.

$$C_1 = C_0 + i.C_0 = C_0(1+i)$$
$$C_2 = C_1 + i.C_0 = C_0(1+i) + 1.C_0 = C_0 + i.C_0 + i.C_0 =$$
$$C_2 = C_0(1+2i)$$
$$.$$
$$C_n = C_0(1+n.i)$$

3) Explicite a fórmula do montante em função.

a) $C_0$ $$C_n = C_0(1+n.i) \Rightarrow C_0 = \left(\frac{C_n}{(1+n.i)}\right)$$

b) n $$C_n = C_0(1+n.i) \Rightarrow n = \left(\frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}\right)$$

c) i $$C_n = C_0(1+n.i) \Rightarrow i = \left(\frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}\right)$$

4) Mostre com um exemplo que as respostas da questão anterior estão corretas.

Suponha: $C_0 = 1.000$
$i = 2\%$ a.m.
$n = 7$ meses

$C_n = C_0(1 + n.i) = 1.000(1 + 7x0{,}02) = 1.140$

a) $C_0 \Rightarrow$ $$C_n = C_0(1+n.i) \Rightarrow C_0 = \frac{C_n}{1+n.i} = \frac{1.140}{1+7x0{,}02} = 1.000{,}00$$

b) $n \Rightarrow$ $$C_n = C_0(1+n.i) \Rightarrow n = \frac{\frac{C_n}{C_0}-1}{i} = \frac{\frac{1.140}{1.000}-1}{0{,}02} = 7$$

## *5.2 – Descontos Bancários - JS*

**Desconto** $\Rightarrow$ $\mathbf{D = C_n - C_0}$ **ou** $\mathbf{C_0 = C_n - D}$

Tipos de Desconto $\begin{cases} \text{Por dentro ou racional} \\ \text{Por fora ou comercial} \end{cases}$

i = taxa de desconto por dentro
d = taxa de desconto por fora

### 5.2.1 DESCONTO POR DENTRO

$D_d = n.i.C_0$

Como $$C_n = C_0(1+n.i) \quad \text{e} \quad C_0 = \frac{C_n}{(1+n.i)}$$

$$D_d = \frac{n.i.C_n}{1+n.i}$$

Exemplo:

$E = C_n = 15.000$
$i = 10\%$ a.m.
$n = 3$ meses

$$D_d = \frac{3x0,1x15.000}{1+3x0,1} = 3.461,53$$

$$D = C_n - C_0 \Rightarrow C_0 = C_n - D$$
$$E_{ef} = C_0 = 15.000 - 3.461,53 = 11.538,47$$

$$i = \frac{3.461,53}{11.538,47} = 0,30$$

$$i_{mensal} = \frac{0,3}{3} = 0,1 = 10\%a.m.$$

### 5.2.2 DESCONTO POR FORA

$D_f = n.d.C_n$

Exemplo:

$C_n = E = 15.000$
$d = 10\%$ a.m.
$n = 3$ meses
$i = ?$

$D_f = 3 \times 0,1 \times 15.000 = 4.500$
$E_{ef} = C_0 = E - D_f = 15.000 - 4.500 = 10.500$

$$i = \frac{4.500}{10.500} = 0,42857$$

$$i_m = \frac{0,42857}{3} = 0,14286 = 14,286\%a.m.$$

**5.2.3 PROPRIEDADES**

1) Se $i = d \Rightarrow D_d < D_f \Rightarrow C_{od} > C_{of}$
2) Se $D_d = D_f \Rightarrow n.i.C_0 = n.d.C_n$, onde $d = \frac{i}{1+n.i}$ e $i = \frac{d}{1-n.d}$

Prova:
Hipótese: $D_d = D_f$

$$n.i.C_0 = n.d.C_n$$

$$C_n = C_0\,(1 + n \text{ x } i)$$

$$C_0 = \frac{C_n}{1+n.i}\text{, logo}$$

$$\frac{\cancel{n}.i.\cancel{C_n}}{1+n.i} = \cancel{n}.d.\cancel{C_n}$$

1) $$d = \frac{i}{1+n.i}$$

2)
$$i = d(1+n.i)$$
$$i = d + d.n.i$$
$$i - d.n.i = d$$
$$i(1-d.n) = d$$
$$i = \frac{d}{1-d.n}$$

Exemplo:

n = 3 meses
i = 10% a.m.
d = ?

$$d = \frac{i}{1 + n.i} = \frac{0,1}{1 + 3x0,1} = 0,0769 = 7,69\%a.m.$$

$$i = \frac{d}{1 - d.n} = \frac{0,0769}{1 - 0,0769x3} = 0,1 = 10\%a.m.$$

## *5.2.4 - Operações Bancárias de Curto Prazo*

**1º. Caso - Sem IOF e Sem Reciprocidade**

$E_{ef}$ = empréstimo efetivo
E = empréstimo nominal
$E_{ef} = E - D_f$
$D_f = n.d.E$
$E_{ef} = E - n.d.E = E(1 - n.d)$

Por outro lado,

$C_n = C_0\,(1 + n.i)$

$E = E_{ef}\,(1 + n.i) \Rightarrow E_{ef} = \dfrac{E}{1 + n.i}$

Então:

$$\cancel{E}(1 - n.d) = \frac{\cancel{E}}{1 + n.i}$$

$$1 + n.i = \frac{1}{1 - n.d}$$

$$\cancel{n}.i = \frac{1}{1 - n.d} - 1 = \frac{\cancel{1-1}+\cancel{n}.d}{1 - n.d}$$

$$i = \frac{d}{1 - n.d}$$

Exemplo:
E = 100
n = 60 dias
d = 12% a.m.
i = ?

J = 100 x 2 x 0,12 = 24

$E_{ef}$ = 100 – 24 = 76

E

$$i = \frac{d}{1 - n.d} = \frac{0{,}12}{1 - 2x0{,}12} = 0{,}1579 = 15{,}79\%a.m.$$

De fato,

$i = \dfrac{24}{76} = 0{,}315789$ no período

$$i_m = \frac{0{,}315789}{2} = 0{,}1579 = 15{,}79\%a.m.$$

**2º. Caso - Com IOF e Sem Reciprocidade**

t = alíquota do IOF em porcentagem ao mês

$\downarrow$ J = E.d.n

$\downarrow$ IOF = E.t.n

$\uparrow$ $E_{ef}$ = E - D      n

E

D = J + IOF = E.n.d + E.t.n = E.n (d + t)

$$\left.\begin{array}{l} E_{ef} = E - D = E - E.n\,(d + t) = E\,(1\text{-}n\,(d + t)) \\ E = E_{ef}\,(1 + n\,.\,i) \Rightarrow E_{ef} = \dfrac{E}{1 + n.i} \end{array}\right\}$$

$$\cancel{E}\,(1 - n(d + t)) = \frac{\cancel{E}}{1 + n.i}$$

$$1 + n.i = \frac{1}{1 - n(d + t)}$$

$$\cancel{n}.i = \frac{1}{1 - n(d + t)} - 1 = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{n}(d + t)}{1 - n(d + t)}$$

$$i = \frac{d + t}{1 - n(d + t)}$$

Exemplo:

E = 10.000
D = 10% a.m.
$T_{IOF}$ = 0,123% am.
N = 3 meses

$$i = \frac{d+t}{1-n(d+t)} = \frac{0{,}1+0{,}00123}{1-3(0{,}1+0{,}00123)} = \frac{0{,}10123}{0{,}696310} = 0{,}1453$$

$$i = 14{,}53\%a.m.$$

De fato:

$$D_f = E.t_{IOF}.n + E.n.d$$

$$D_f = 10.000x0{,}00123x3 + 10.000x0{,}1x3$$

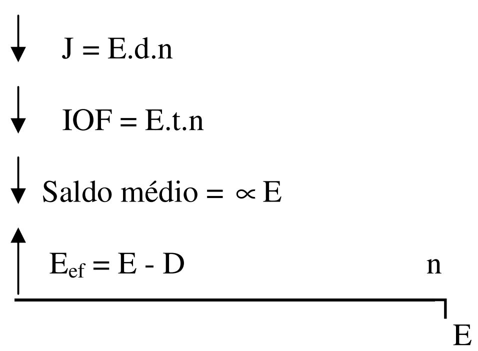
$$D_f = 36{,}90 + 3.000{,}00 = 3.036{,}90$$

$$E_{ef} = E - D = 10.000 - 3.036{,}90 = 6.963{,}10$$

$$i = \frac{3.036{,}10}{6.963{,}10} = 0{,}43602706$$

$$i_m = \frac{0{,}43602706}{3} = 0{,}1453 = 14{,}53\%a.m.$$

**3º. Caso - Com IOF e Com Reciprocidade**



$D = E.d.n + E.t.n + \propto E$

$D = E[d.n + t.n + \propto] = E\,[n\,(t + d) + \propto]$

$E_{ef} = E - D = E - E\,[n\,(d + t) + \propto]$

$E_{ef} = E\,[1 - n\,(d + t) - \propto]$

$E = E_{ef}\,(1 + n.i) + \propto E$

$E - \propto E = E_{ef}\,(1 + n.i)$

$$E(1 - \propto) = E_{ef}\ (1 + n.i) \Rightarrow E_{ef} = \frac{E(1-\propto)}{(1+n.i)}$$

$$\cancel{E}[1 - n(d + t) - \propto] = \frac{\cancel{E}(1-\propto)}{(1+n.i}$$

$$1 + n.i = \frac{1-\propto}{1-n(d+t)-\propto}$$

$$\cancel{n}.i = \frac{1-\propto}{1-n(d+t)-\propto} - 1 = \frac{\cancel{1}-\cancel{\propto}-\cancel{1}+\cancel{n}(d+t)+\cancel{\propto}}{1-n(d+t)-\propto}$$

$$i = \frac{(d+t)}{1-n(d+t)-\propto}$$

Exemplo:

1) $E = 10.000$
   $d = 10\%$ a.m.
   $t = 0{,}123\%$ a.m.
   $n = 3$ meses
   $\propto = 10\%$

   Calcule o valor do desconto e a taxa efetiva?

$$i = \frac{d+t}{1-n(d.t)-\propto} = \frac{0{,}1+0{,}00123}{1-3(0{,}1+0{,}00123)-0{,}1}$$

$$i = \frac{0{,}10123}{0{,}596310} = 0{,}169761 = 16{,}9761\%a.m.$$

De fato:

D = 10.000 x 3 x 0,1 + 10.000 x 3 x 0,00123 + 10.000 x 0,1
D = 3.000 + 36,90 + 1.000 = 4.036,90
$E_{ef}$ = 10.000 - 4.036,90 = 5.963,10

$$i = \frac{4.036,90 - 1.000}{5.963,10} = 0,509282 \quad \text{no período}$$

$$i_{mensal} = \frac{0,509282}{3} = 0,169761 = 16,9761\% a.m.$$

2) E = 25.000
d = 2% a.m.
n = 4 meses
$D_d$ = ?
$D_f$ = ?
i = ?

$$D_d = \frac{n.i.C_n}{1 + n.i} = \frac{4x0,02x25.000}{1 + 4x0,02} = 1.851,85$$

$$D_f = n.d.C_n = 4x0,02x25.000 = 2.000,00$$

$$i = \frac{d}{1 - n.d} = \frac{0,02}{1 - 0,02x4} = 0,02174 = 2,174\% a.m.$$

De fato:

$$i = \frac{2.000}{23.000} = 0,086956 = 8,6956\%$$

$$i_m = \frac{0,086956}{4} = 0,021739 = 2,174\% a.m.$$

3) Se $i = d$, por que $D_d < D_f$?

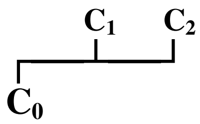
Em $D_d$ a taxa incide sobre $E_{ef}$, enquanto que em $D_f$ a taxa incide sobre E.
Como $E_{ef} < E \Rightarrow D_d < D_f$

4) Se $i = d$, por que $C_{od} > C_{of}$?

Se $i = d$, $D_d < D_f$. Sendo $C_o = C_n - D$, então: $C_n - D_d > C_n - D_f$, logo $C_{od} > C_{of}$

## *5.3 – Juros Compostos*

Na incorporação a juros compostos, a taxa é aplicada sempre sobre o capital atualizado até o período imediatamente anterior.




$$C_1 = C_0 + i.C_0 = C_0\ (1+i)$$

$$C_2 = C_1 + i\ .\ C_1 = C_1(1 + i) = C_0\ (1 + i)\ (1 + i)$$

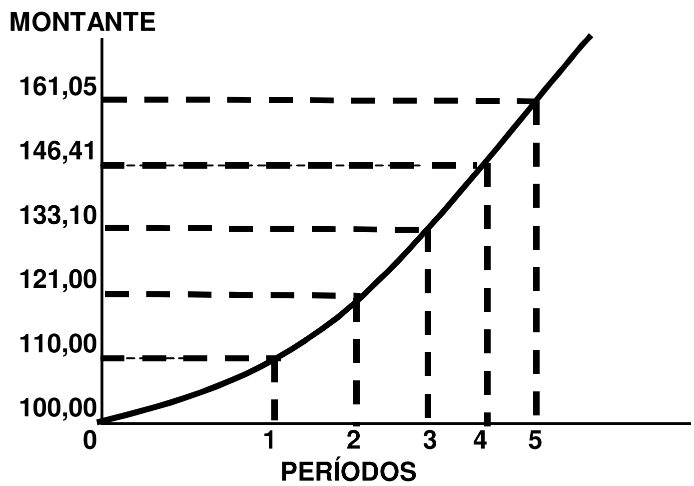
$$C_2 = C_0\ (1 + i)^2$$

Se $i = 10\%$ e $C_0 = 100$
$C_1 = 100 + 0{,}10 \times 100 = 110$
$C_2 = 110 + 0{,}1 \times 110 = 121$

**TABELA DE CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS**

| PERÍODO | CAPITAL NO INÍCIO DO PERÍODO | JUROS RELATIVOS AO PERÍODO 10% | MONTANTE NO FINAL DO PERÍODO |
|---|---|---|---|
| 1 | 100,00 | 100 X 10/100 = 10 | 110,00 |
| 2 | 110,00 | 110 X 10/100 = 11 | 121,00 |
| 3 | 121,00 | 121 X 10/100 = 12,1 | 133,10 |
| 4 | 133,10 | 133,10 X 10/100 = 13,31 | 146,41 |
| 5 | 146,41 | 146,41 X 10/100 = 14,64 | 161,05 |

**Gráfico da Capitalização a Juros Compostos**



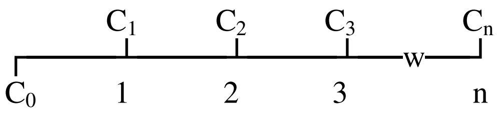
Conclusões:

Há incorporação de juros sobre juros.

O montante cresce exponencialmente no tempo.

Juros incorporados ao capital são cada vez maiores.

## *5.3.1 – Fórmulas de Juros Compostos*




### 5.3.1.1 Expressão para o Cálculo do Montante:

$C_1 = C_0 + i.C_0 = C_0\ (1 + i)$

$C_2 = C_1 + i.C_1 = C_1\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^2$

$C_3 = C_2 + i.C_2 = C_1\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^2\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^3$

•

•

$C_{n-1} = C_{n-2} + i.C_{n-2} = C_{n-2}\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^{n-2}\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^{n-1}$

$C_n = C_{n-1} + i.C_{n-1} = C_{n-1}\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^{n-1}\ (1 + i) = C_0\ (1 + i)^n$

$$C_n = C_0\ (1 + i)^n$$

### 5.3.1.2 Expressão para o Cálculo do Número de Períodos:

$$C_n = C_0\ (1 + i)^n$$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n$$

$$\ln.\frac{C_n}{C_0} = n.\ln(1 + i)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C}\right)}{\ln(1 + i)}$$

Exemplo:
PF aplicou R$ 15.000,00 a 30% a.a. (JC) recebendo após certo prazo o montante de R$ 30.195,36. Que prazo é este?

$$n = \frac{\ln\left(\frac{30.195,36}{15.000,00}\right)}{\ln\left(1 + \frac{30}{100}\right)} = \frac{0,699638}{0,262364} = 2,67$$

<u>**R: 2 anos e 8 meses**</u>

### 5.3.1.3 Expressão para o Cálculo da Taxa de Juros

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n$$

$$\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} = (1 + i)$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1$$

### 5.3.1.4 Expressão para o Cálculo do Capital Inicial

$$C_n = C_0\ (1 + i)^n$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

## *5.4 – Juros Compostos X Progressão Geométrica*

$a_1 \quad a_2 \quad a_3.......a_k$

$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$ (razão constante), valendo para qualquer k

Exemplos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |

$a_1 = a_1$
$a_1 = a_1q$
$a_3 = a_2q = a_1q.q = a_1.q^2$
$a_4 = a_3q = a_1q^2.q = a_2.q^3$
•
•
$a_k = a_1q^{(k-1)}$

$C_n = a_k$
$C_0 = a_1$
$(1 + I) = q$
$n = k - 1$

1) Determinar o valor de resgate de um empréstimo de R$ 50.000,00 com taxa de juros de 5% a.m. e prazo de 15 dias.

n = 15 dias = 0,5 mês
$C_n = C_0(1 + i)^n$
$50.000\ (1 + 0{,}05)^{0,5} =$
$50.000\ (1{,}024695) = 51.234{,}75$

**Pela HP12C**
STO EEX
50.000 CHS PV
0,5 n
5 i
FV 51.234,75

**R: R$51.234,75**

2) Mostre a evolução do valor de resgate de um empréstimo de R$ 50.000,00, com taxa de juros de 5% a.m. e prazos de 10, 20, 30, 40, 50 e 60 dias. Fazer o cálculo no regime de juros simples e compostos.

i = 5% a.m.

n = 10 dias $\Rightarrow$ $\frac{10}{30} = 0{,}3333$ mês

n = 20 dias $\Rightarrow$ $\frac{20}{30} = 0{,}6667$ mês

n = 40 dias $\Rightarrow$ $\frac{40}{30} = 1{,}3333$ mês

n = 50 dias $\Rightarrow$ $\frac{50}{30} = 1{,}6667$ mês

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$C_{10} = 50.000\ (1 + 0{,}05)^{0{,}333333} = 50.819{,}82$

$C_{20} = 50.000\ (1 + 0{,}05)^{0{,}666666} = 51.653{,}08$

$C_{30} = 50.000\ (1 + 0{,}05)^{1} = 52.500{,}00$

$C_{40} = 50.000\ (1 + 0{,}05)^{1{,}33333} = 53.360{,}80$

$C_{50} = 50.000\ (1 + 0{,}05)^{1{,}66666} = 54.235{,}73$

$C_{60} = 50.000\ (1 + 0{,}05)^{2} = 55.125{,}00$

$$C_n = C_0(1 + i.n)$$

$C_{10} = 50.000\ (1 + 0{,}05 \text{ x } 0{,}333333) = 50.833{,}33$

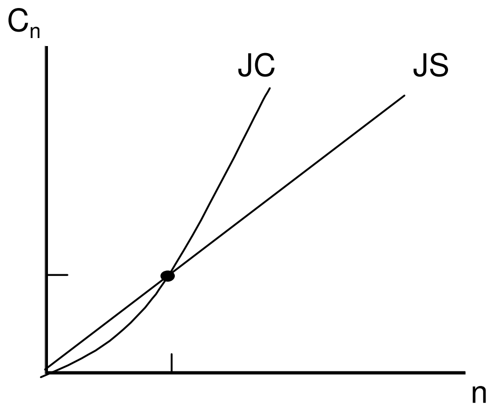
$C_{20} = 50.000\ (1 + 0{,}05 \text{ x } 0{,}666666) = 51.666{,}67$

$C_{30} = 50.000\ (1 + 0{,}05) = 52.500{,}00$

$C_{40} = 50.000\ (1 + 0{,}05 \text{ x } 1{,}33333) = 53.333{,}33$

$C_{50} = 50.000\ (1 + 0{,}05 \text{ x } 1{,}66666) = 54.166{,}67$

$C_{60} = 50.000\ (1 + 0{,}05 \text{ x } 2) = 55.000{,}00$




**Pela HP12C para Juro Composto - JC**

**R:**

| | |
|---|---|
| **50.000** | **PV** |
| **5** | **i** |
| | **n → variando entre 0,333333 e 2** |
| | **FV→ variando entre 50.833,33 e 55.000,00** |

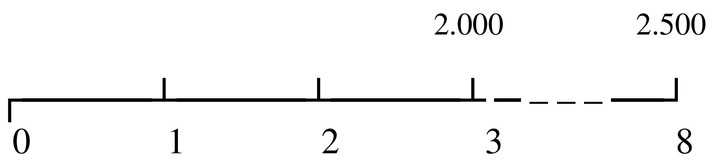
## *5.5 – Capitais Equivalentes (JC)*

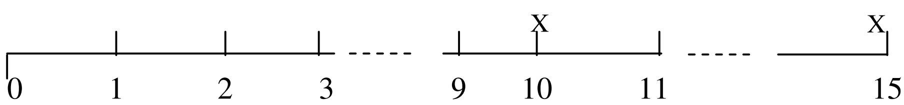
Dois fluxos de caixa são considerados equivalentes se os respectivos valores atuais são idênticos em qualquer período considerado.

Exemplo:

Uma empresa tem compromisso de R$ 2.000,00 e de R$ 2.500,00 a vencer de hoje a três e oito meses respectivamente. Seu gerente financeiro propõe à empresa credora a troca desses compromissos por outros dois que sejam equivalentes, a vencer de hoje a 10 e 15 meses respectivamente.
Considerando a taxa efetiva linear de 10% a.a.

i = 10% a.m.



$$C_0 = \frac{20}{(1+0{,}1x3)} + \frac{2.500}{\left(1+0{,}1x8\right)} = \frac{x}{(1+0{,}1x10)} + \frac{x}{(1+0{,}1x15)}$$

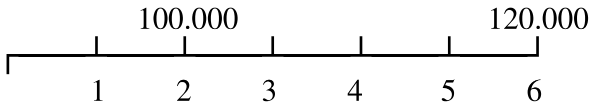
$$C_0 \;= 1.538{,}46 + 1.388{,}89 = x(\frac{1}{2} + \frac{1}{2{,}5})$$

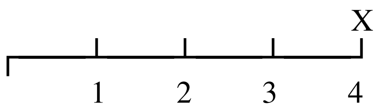
$$C_0 = 2.927{,}35 = 0{,}9x \qquad onde$$

$$x = 3.252{,}61$$

Exemplos:

1) Uma empresa deseja trocar compromissos de R$ 100.000 e R$ 120.000 a vencer em dois e seis meses a partir de hoje, respectivamente, por um único título, vencível em quatro meses a partir de hoje. Qual o valor do novo compromisso se a taxa de juros efetiva linear (JS) for de 5% a.m.




$$\frac{100.000}{1+0{,}05x2} + \frac{120.000}{1+0{,}05x6} = \frac{X}{1+0{,}05x4}$$

$$90.909{,}09 + 92.307{,}69 = 0{,}8333X$$

$$X \;= \frac{183.216{,}78}{0{,}83333} = 219.860{,}14$$

**R: R$ 219.860,14**

2) Tenho uma dívida composta de cinco prestações mensais e iguais de R$ 1.000,00. A taxa de juros compostos da operação é de 2% a.m. Como vou receber um prêmio daqui a sessenta dias (data de vencimento da 2ª. parcela), por quanto devo liquidar integralmente a dívida naquela data.

1.000 1.000 1.000 1.000 1.000

0 1 2 3 4 5

X

1 2

$$C_2 = 1.000\left(1+\frac{2}{100}\right)+1.000+\frac{1.000}{(1{,}02)^1}+\frac{1.000}{(1{,}02)^2}+\frac{1.000}{(1{,}02)^3}$$

$$C_2 = 1.020{,}00+1.000{,}00+980{,}39+961{,}16+942{,}32$$
$$C_2 = 4.903{,}87$$

$$C_0 = VP = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n-1}\right] = 1.000\left[\frac{(1{,}02)^5-1}{(1{,}02)^5-0{,}02}\right]$$

$$C_0 = 4713{,}46$$
$$C_2 = 4713{,}46(1+0{,}2)^2 = 4.903{,}88$$

**<u>R: R$ 4.903,87</u>**

# 6. Classificação das Taxas de Juros

## *6.1 – Taxa Efetiva*
Quando a unidade de tempo de referência coincide com a unidade de tempo da ocorrência da capitalização dos juros.

Exemplo:

17% a.a., sendo a capitalização anual.
12% a.s., sendo a capitalização semestral
5% a.t., sendo a capitalização trimestral
3% a.b., sendo a capitalização bimestral
1,5% a.m., sendo a capitalização mensal

Obs.: Somente taxas efetivas podem ser usadas em calculadoras financeiras e nas planilhas eletrônicas.

## *6.2 – Taxa Nominal*
Quando a unidade de tempo de referência é diferente da unidade de tempo em que ocorre a capitalização dos juros.

Exemplo:

17% a.a., sendo a capitalização semestral
12% a.s., sendo a capitalização trimestral
5% a.t., sendo a capitalização mensal
3% a.b., sendo a capitalização mensal
1,5% a.m., sendo a capitalização diária

Para transformar taxa nominal em taxa efetiva faz-se a transformação no regime de juros simples.

Exemplo:
17% a.a. capitalizada semestralmente

$$i = \frac{17\% a.a.}{2 semestres} = 8,5 a.s.$$

## *6.3 – Taxas Proporcionais*
Em juros simples, duas taxas de juros são proporcionais quando aplicadas ao mesmo capital, geram montante idêntico no fim do prazo da operação.

Duas taxas de juros (efetivas) $i_n$ e $i_k$, referentes ao período n e k, respectivamente, são proporcionais quando se verifica a relação.

$$\frac{i_n}{i_k} = \frac{n}{k}$$

Exemplo: 24% a.a. é proporcional a 2% a.m., pois,

$$\frac{24}{2} = \frac{12}{1}$$

## *6.4 – Taxa de Juros Real*
Na formação da taxa de juros consideram-se, pelo menos, dois componentes. Um índice representando a atualização monetária e outro representando a efetiva remuneração do capital.

Exemplo: Um salário de R$ 1.000,00 foi reajustado por 50%. Sabendo que a taxa de inflação no período considerado foi de 40%, em quanto aumentou ou diminuiu o poder de compra do salário?

Formação da taxa de juros: $\left(1+\frac{i}{100}\right) = \left(1+\frac{\Pi}{100}\right) x \left(1+\frac{r}{100}\right)$

$$\left(1+\frac{50}{100}\right) = \left(1+\frac{40}{100}\right) x \left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{r}{100}\right) = \frac{\left(1+\frac{50}{100}\right)}{\left(1+\frac{40}{100}\right)} \Rightarrow r = \left(\frac{1,5}{1,4} - 1\right) x100 = 7,14\%$$

1.000 x 1,5 = 1.500

1.000 x 1,4 = <u>1.400</u> De fato: $\frac{100}{1.400} = 0,071428 = 7,1428\%$

aumento real = 100

## *6.5 – Taxa de Juros Prefixada*

É aquela taxa que determina o valor de resgate de um título no momento da efetivação do negócio, ou seja, é aquela que considera dada a parcela correspondente a atualização monetária, bem como a parcela relativa aos juros reais.
Exemplo: CDB pré = 21,90% a.a.

## *6.6 – Taxa de Juros Pós-fixada*

Quando a taxa de juros não computa a parcela referente à atualização monetária definida através de um índice previamente pactuado.
Exemplo: CDB pós = 15% a.a. + IGP-M

## *6.7 – Taxas Equivalentes*

Em juros compostos duas taxas de juros são equivalentes quando aplicadas sobre o mesmo capital, geram montante idêntico no final do mesmo prazo.

$$C_n = C_0(1 + \frac{i_a}{100})^n \qquad C_n = C_0(1 + \frac{i_m}{100})^1$$

$$C_n = C_0(1 + \frac{i_a}{100})^1 \qquad C_n = C_0(1 + \frac{i_m}{100})^{12}$$

$$\cancel{C_0}(1 + \frac{i_a}{100})^1 = \cancel{C_0}(1 + \frac{i_m}{100})^{12}$$

$$i_a = \left[(1 + i_m)^{12} - 1\right]100$$

$$i_m = \left[(1 + i_a)^{\frac{1}{12}} - 1\right]100$$

JS = Tx Proporcionais
JC = Tx Equivalente

## *6.8 – Fórmula Geral -Taxas Equivalentes*

Em juros compostos duas taxas de juros são equivalentes quando aplicadas sobre o mesmo capital, geram montante idêntico no final do mesmo prazo. Dessa forma, por se tratar de capitalização exponencial, a expressão da taxa equivalente é a média geométrica da taxa de juros do período inteiro, isto é:

$$i_q = \left[ \left( 1 + i \right)^{\frac{1}{q}} - 1 \right] 100$$

Onde
$i_q$- taxa relativa ao período de capitalização
i- taxa relativa ao período inteiro
q- número de períodos de capitalização.

Exemplos:

1) Determinar a taxa semestral e anual proporcional à taxa de 2% a.m.

$i_s = 2\%x6 = 12\%$ ao semestre

$i_a = 2x12 = 24\%a.a$

2) Determinar as taxas semestral e anual equivalentes à taxa de 2% a.m.

$$\left(1+\frac{2}{100}\right)^6 = \left(1+\frac{i_s}{100}\right)$$

$$i_s = \left[1{,}02^6 - 1\right]100 = 12{,}62\%a.s.$$

$$\left(1+\frac{2}{100}\right)^{12} = \left(1+\frac{i_a}{100}\right)$$

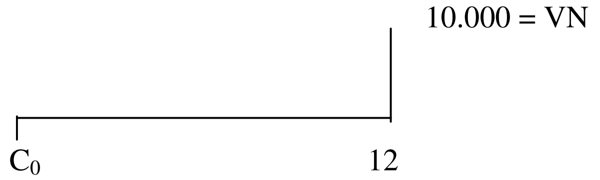
$$i_a = \left[(1{,}02)^{12} - 1\right]100 = 26{,}82\%a.a.$$

# 7. Valor Nominal, Valor Atual e Valor Futuro

## *7.1 – Valor Nominal*

Quanto vale um compromisso na data de seu vencimento.

Exemplo: Uma aplicação financeira hoje será resgatada por R$ 10.000,00 daqui a um ano (12 meses).




## *7.2 – Valor Atual*

O valor de um compromisso em data anterior a de seu vencimento, em geral o momento presente.

Exemplo 1: Uma aplicação hoje rende um título com valor nominal de R$ 24.000,00 daqui a 12 meses pelo regime de juros simples.


Se a taxa de juros é de 6% a.m., o VA é =

$$C_n = C_0(1 + n.i)$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + n.i)} = \frac{24.000}{(1 + 12x0,06)} = 13.953,49$$

Exemplo 2: Idem pelo regime de juros compostos.

$$C_n = C_0 (1 + .i)^{12}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + .i)^{12}} = \frac{24.000}{(1 + 0{,}06)^{12}} = 11.927{,}26$$

## *7.3 – Valor Futuro*

Valor do título em qualquer data posterior à que estamos considerando no momento. Valor Futuro é idêntico ao montante, se a data considerada for a do vencimento da aplicação.

Exemplo 1: Uma pessoa aplica R$ 10.000,00 hoje por 3 meses a taxa de 5% a.m. (JS)

$C_n = C_0\ (1+i.n)$
VF = VA (1+i.n)
VF = 10.000 (1+3x0,05)
VF = 11.500,00

Exemplo 2: Uma pessoa aplica R$ 10.000,00 hoje por 3 meses a taxa de 5% a.m. (JC).
$C_n = C_0\ (1+i)^n$
$VF = VA\ (1+i)^n$
$VF = 10.000\ (1+0{,}05)^3$
VF = 11.576,25

# 8. Formação da Taxa Básica de Juros

$i_{ef}$ = taxa efetiva
$\prod^*$ = expectativa de inflação
R = taxa de juro real

$$\left(1+\frac{i_{ef}}{100}\right)=\left(1+\frac{\Pi^*}{100}\right)x\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

No mercado interbancário, onde é definida a taxa de juros primária da economia, a convenção é computar o prazo anual em 252 dias úteis.
Desse modo, as operações de política monetária realizadas pelo Banco Central, utilizando títulos públicos federais, refletem as taxas de juros admitidas pela Autoridade Monetária.

Assim, se $\prod^*$ = 4% a.a. e r = 10% a.a., a taxa efetiva anual será de:

$$\left(1+\frac{i_{ef}}{100}\right)=\left(1+\frac{4}{100}\right)x\left(1+\frac{10}{100}\right)=1{,}144$$

$$i_{ef}=[1{,}144-1]100=14{,}40\%\text{a.a.}$$

Da mesma forma se,
$i_{ef}$ = 15% a.a.
r = 10% a.a.
$\prod^*$ = ?

$$\left(1+\frac{15{,}00}{100}\right)=\left(1+\frac{\Pi^*}{100}\right)x\left(1+\frac{10{,}00}{100}\right)=1{,}144$$

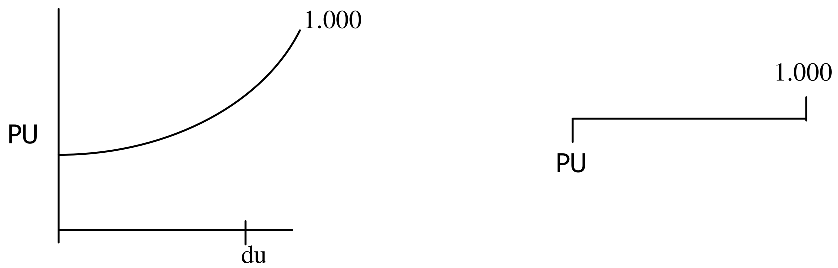
$$\Pi^*=\left[\frac{1{,}15}{1{,}10}-1\right]100=4{,}545\%\text{a.a.}$$

# 9. Letras do Tesouro Nacional

## *9.1 – Características Básicas*

Prefixado com Desconto
Curto Prazo: Mínimo de 28 Dias Corridos
Valor Nominal = Valor de Resgate = R$ 1.000,00
Emissor = Tesouro Nacional
Negociação = PU X Taxa Efetiva

CURVA DE RENDIMENTO (CURVA DO PAPEL)




A cada dia o PU do título incorpora juros correspondentes a 1 overnight.

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

$$1.000 = PU\left(1 + \frac{i_{efa}}{100}\right)^{\frac{du}{252}} \Rightarrow PU = \frac{1.000}{\left(1 + \frac{i_{efa}}{100}\right)^{\frac{du}{252}}}$$

$$1.000 = PU\left(1 + \frac{i_{ef}}{100}\right)^{\frac{du}{252}}$$

Exemplos:

1) Suponha uma LTN emitida no 1º. dia de um mês com 20du e resgatada no 1º. dia útil do mês seguinte.

Admita: $\Pi_a^* = 6\% \quad a.a.$
$r_a^* = 12\% \quad a.a.$

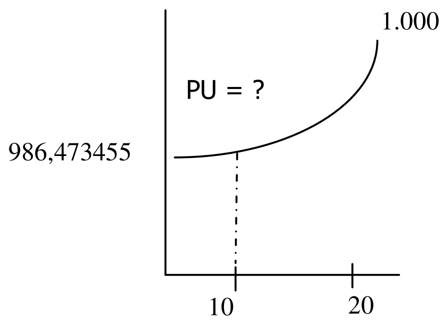
Qual deve ser o PU?

$$PU = \frac{1.000}{(1{,}06x1{,}12)^{\frac{20}{252}}} = 986{,}473455$$

2) Considerando o exercício anterior, calcule o PU da LTN no 10º. dia útil (9 d.u. decorridos).

$$PU_{10du} = 986{,}473455(1{,}06x1{,}12)^{\frac{9}{252}} =$$

$$986{,}473455x1{,}00614731 = 992{,}537609$$




ou

$$PU_{10du} = \frac{1.000}{(1{,}06x1{,}12)^{\frac{11}{252}}} = 992{,}537609$$

## *9.2 – Características Básicas da NTN-F*

Prefixado com pagamento de cupons periódicos(semestrais)
Cupom semestral de juros- 10% a.a.
Longo Prazo
Valor Nominal = Valor de Resgate = R$ 1.000,00
Emissor = Tesouro Nacional
Negociação = PU X Taxa Efetiva

Exemplo de uma NTN-F com vencimento em 1/1/2014
Operação de compra com liquidação em 9/8/2010

| BASE 252 | NTN-F | | LIQUIDACAO: | 9/8/2010 |
|---|---|---|---|---|
| **CÁLCULO DO PU A PARTIR DA CURVA BMF** | | | | |
| CUPOM | DATA | D.U. | V. P. | CURVA BMF |
| 48,80885 | 3/1/2011 | 101 | 46,8409 | **10,81** |
| 48,80885 | 1/7/2011 | 225 | 44,4003 | **11,19** |
| 48,80885 | 2/1/2012 | 352 | 41,8858 | **11,57** |
| 48,80885 | 2/7/2012 | 477 | 39,5116 | **11,81** |
| 1048,808850 | 2/1/2013 | 603 | 801,9210 | **11,87** |
| COTACAO | | | 974,559541 | |
| TAXA: | 11,8370 | | | |

# 10. Certificado de Depósito Bancário

$$\text{TIPOS} \begin{cases} \rightarrow \text{PÓS-FIXADO} \\ \rightarrow \text{PRÉFIXADO} \end{cases}$$

## *10.1 – Características Comuns*

Título privado de captação (BANCOS)
Endossável ou transferível
Taxa bruta anualizada
IR - percentual aplicado sobre o rendimento nominal
Prazo em dias corridos ou úteis
Ano de 360 dias (d.c.) ou 252 (d.u.)

## *10.2 – Características Específicas Prefixado*

Expectativa de inflação embutida na taxa
Valor bruto (e líquido) de resgate conhecido no momento da aplicação

## *10.3 – Características Específicas Pós-fixado*

Taxa negociada representa remuneração adicional ao indexador
Valor bruto e líquido conhecido apenas no vencimento

*Terminologia*
dc = dias corridos
du = dias úteis
$C_n = V_{RB}$ = valor de resgate bruto
$C_0 = V_a$ = valor aplicado
i = taxa de juros prefixada
r = taxa de juros real (caso de título pós-fixado)
I = Indexador

PRÉFIXADO

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{dc}{360}}$$

ou

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{du}{252}}$$

$$V_{RB} = V_a\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{dc}{360}}$$

$$i = \left(\frac{V_{RB}}{V_a}\right)^{\frac{360}{dc}} - 1x100$$

PÓS-FIXADO

$$C_n = C_0 \text{ x I x} \left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{dc}{360}}$$

ou

$$C_n = C_0 \text{ x I x} \left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{du}{252}}$$

$$V_{RB} = V_a \text{ x I x} \left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{dc}{360}}$$

$$r = \left(\frac{V_{RB}}{V_a \text{ x I}}\right)^{\frac{360}{dc}} - 1x100$$

---

Exemplo:

CDB PRÉ

Calcule o $V_{RB}$ e $V_{RL}$, bem como a taxa líquida do CDB Pré.
i = 22% a.a.
$V_a$ = 1.000.000,00
dc = 30
du = 20
IR = 15% rendimento nominal

$$V_{RB} = V_a\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{30}{360}} = 1.000.000\left(1+\frac{22}{100}\right)^{\frac{30}{360}} = 1.016.708,96$$

$$IR = 0,15(1.016.708,96 - 1.000.000,00) = 2.506,34$$

$$V_{RL} = 1.016.708,96 - 2.506,34 = 1.014.202,62$$

$$i_B = \left[\frac{1.016.708,96}{1.000.000,00}\right]^{\frac{360}{30}} - 1x100 = 22,00\% \text{ a.a.}$$

$$i_L = \left[\frac{1.014.202,62}{1.000.000,00}\right]^{\frac{360}{30}} - 1x100 = 18,44\% \text{ a.a.}$$

**R: 18,44% a.a.**

**CDB PÓS**

$V_a$ = R\$ 1.000.000,00
TR $_{acum}$ = 7,442417%
n = 270 dias corridos
i = 18% a a.
Alíquota do IR na fonte = 20%
$V_{RL}$ = ?
$I_L$ = ?

$$v_{RB} = 1.000.000,00x1.07442417x(1,18)^{\frac{270}{360}} = 1.216.430,42$$

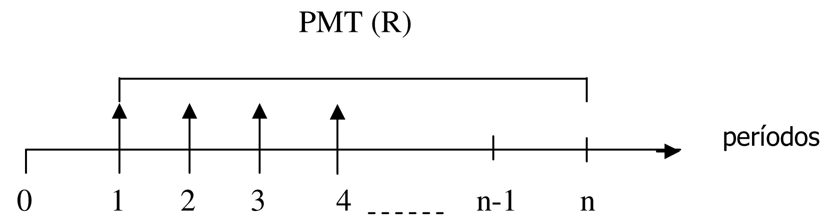
$$I_R = 0,2(1.216.430,42 - 1.000.000) = 43.286,08$$

$$V_{RL} = 1.216.430,42 - 43.286,08 = 1.173.144,34$$

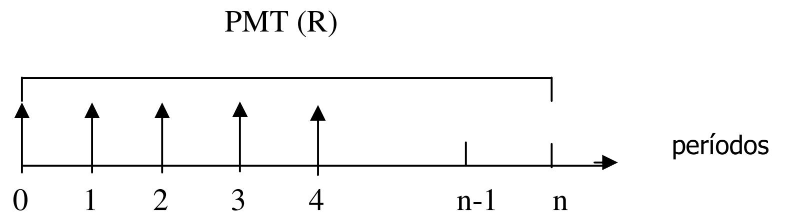
$$I_L = \left\{\left[\frac{1.173.144,34}{1.000.0001,07442417}\right]^{\frac{360}{270}} - 1\right\}x100 = 12,43\% \quad \text{a.a.}$$

# 11. Séries Uniformes de Pagamentos

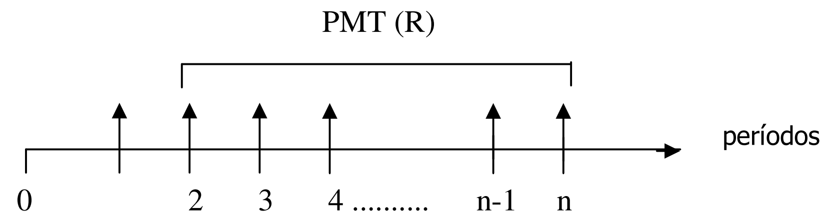
## *11.1 – Postecipadas*



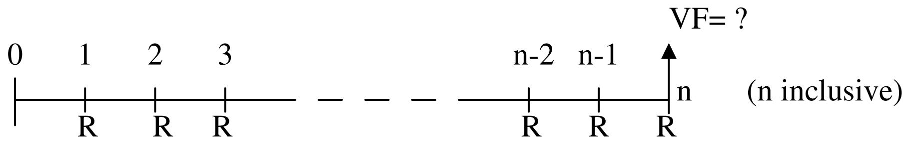

## *11.2 – Antecipadas*




## *11.3 – Diferidas*



## *11.4 – Expressão para o Cálculo do Valor Futuro, dada a Prestação.*




O valor futuro (VF) desta série de pagamentos iguais é equivalente à soma da capitalização de todos os pagamentos.
No período n veja que, no caso, a prestação relativa ao período n não capitaliza juros.

Calculando VF em cada ponto do fluxo de caixa fica:

$VFR_n = R$
$VFR_{n-1} = R\ (1 + i)$
$VFR_{n-2} = R\ (1 + i)^2$
$VFR_3 = R\ (1 + i)^{n-3}$
$VFR_2 = R\ (1 + i)^{n-2}$
$VFR_1 = R\ (1 + i)^{n-1}$

A expressão geral fica:

(1) $VF = R + R\cancel{(1+i)} + R\cancel{(1+i)^2} + \ldots\ldots + R\cancel{(1+i)^{n-3}} + R\cancel{(1+i)^{n-2}} + R\cancel{(1+i)^{n-1}}$

(2) $VF(1+i) = R\cancel{(1+i)} + R\cancel{(1+i)^2} + R\cancel{(1+i)^3}\ \ldots\ldots + R\cancel{(1+i)^{n-2}} + R\cancel{(1+i)^{n-1}} + R(1+i)^n$

**(2) – (1)**

$VF + iVF - VF = R(1+i)^n - R$

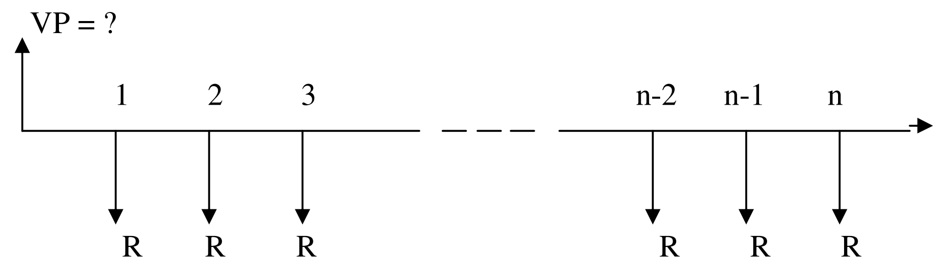
$iVF = R\ [(1+i)^n - 1]$

$$VF = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

### *11.5 – Expressão para o Cálculo da Prestação, dado o Valor Futuro.*

$$R = VF\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

### *11.6 - Expressão para o Cálculo do Valor Presente, dada a Prestação .*




$$VF = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$VF = VP\ (1+i)^n$$

$$VP\ (1+i)^n = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$VP = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n\,.\,i}\right]$$

## *11.7 – Expressão para o Cálculo da Prestação, dado o Valor Presente.*

$$R = VP\left[\frac{(1+i)^n \, x \, i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

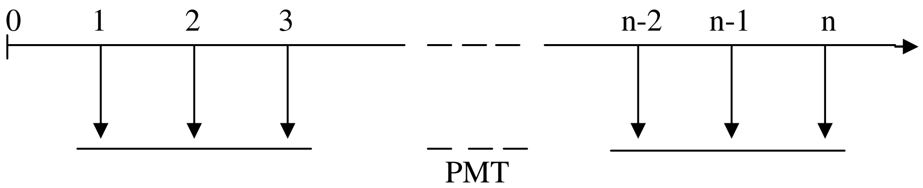
## *Aplicações das Expressões*

Variáveis envolvidas: VP, VF, R, i, n

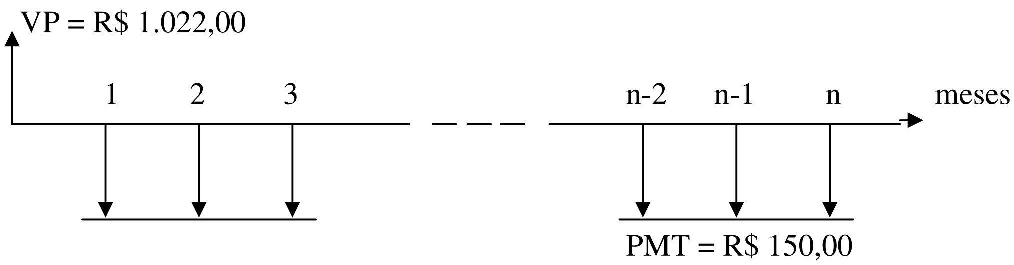
R → (i), (VP) e (n)
VP → (R), (i) e (n)
VF → (R), (i) e (n)
R → (VF), (i) e (n)
i → (VP), (n) e (R)
n → (VP), (i) e (R)

## *11.8 – Operações com Séries*

**11.8.1 POSTECIPADAS – default (Padrão HP-12C)**




Exemplo:
1) Uma loja anuncia televisão por R$ 1.022,00 à vista ou em 12 X R$ 150,00. Considerando que a prestação é devida um mês após a data da compra, calcule a taxa de juros.




ERRO = não fazer 12 X 150,00

Sabendo que $VP = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \,.\, i}\right]$, temos: $1022{,}00 = 150{,}00\left[\frac{(1+i)^{12} - 1}{(1+i)^{12} \,.\, i}\right]$

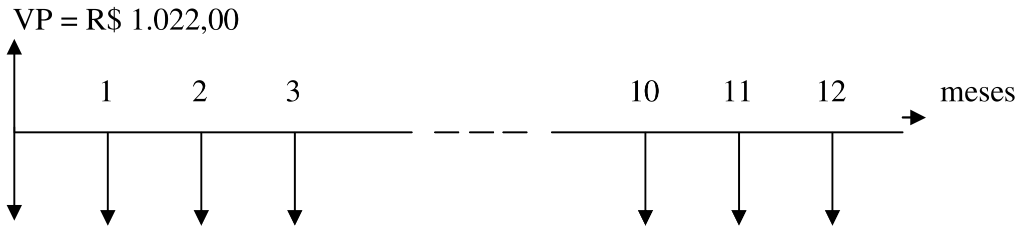
Cálculo por tentativa

**Pela HP-12C, teríamos:**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| | <f><CLEAR><FIN> | | |
| 150 | <CHS><PMT> | -150.000 | valor das parcelas |
| 1.022 | <VP> | 1.022.000 | valor financiado |
| 12 | <n> | 12.000 | no. de parcelas |
| | <i> | 10.001 | tx. de juros mensal |

**11.8.2 ANTECIPADAS**

Exemplo 1:



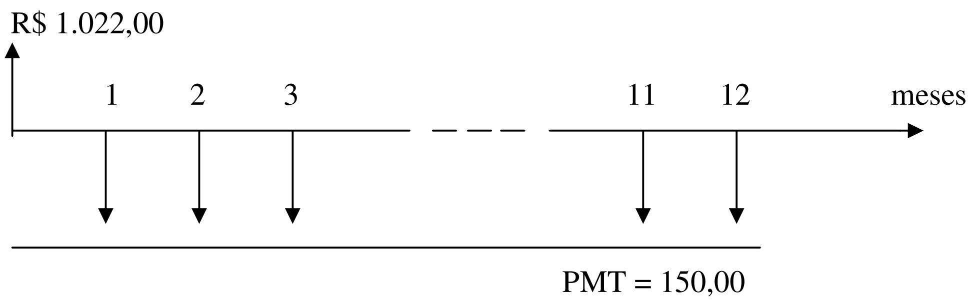

Faz como se fosse postecipada x (1 + i)

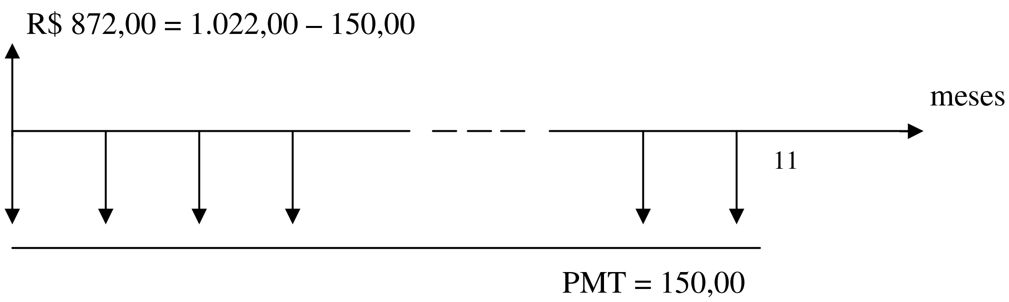
$$VP = (1+i) \,.\, R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n - i}\right]$$

**Pela HP-12C, teríamos:**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| | <f><CLEAR><FIN> | | limpa var. financ. |
| | <g><BEG> | | 1ª. parcela antecipada |
| 150 | <CHS><PMT> | -150.000 | valor das prestações |
| 1022 | <VP> | 1022.000 | valor financiado |
| 12 | <n> | 12.000 | no. de parcelas |
| | <i> | 12,48735 | tx. de juros mensal |

**11.8.3 Opção para cálculo por série POSTECIPADA**




Financiamento de R$ 872,00 em 11 meses.

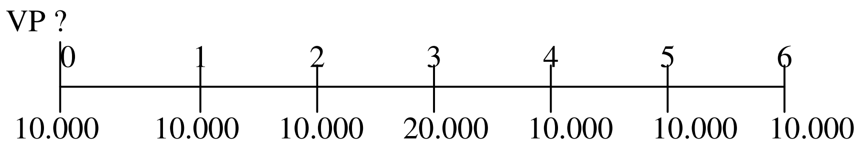
**Pela HP-12C, teríamos:**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| | <f><CLEAR><FIN> | | limpa var. financ. |
| | <g><END> | | 1ª. parcela antecipada |
| 150 | <CHS><PMT> | -150.000 | valor das prestações |
| 872 | <VP> | 872.000 | valor financiado |
| 11 | <n> | 11.000 | no. de parcelas |
| | <i> | 12,48735 | tx. de juros mensal |

Exemplo:

1) Sabe-se que um automóvel pode ser vendido a prazo em sete parcelas mensais de R$ 10.000,00, sendo uma de entrada e com uma intermediária no terceiro mês, no mesmo valor.

Qual o valor à vista se a taxa for 10% a.m.?




$$VP = 10.000 + \frac{10.000}{1,1} + \frac{10.000}{1,1^2} + \frac{20.000}{1,1^3} + \frac{10.000}{1,1^4} + \frac{10.000}{1,1^5} + \frac{10.000}{1,1^6}$$

VP = 10.000 + 9.090,90 + 8.264,46 + 15.026,30 + 6.830,13 + 6.209,21 + 5.644,74

VP = 61.065,74

Ou, **pela HP-12C**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| | <f><CLEAR><REG> | | limpeza |
| 10.000 | <g><$CF_0$> | 10.000,00 | parcela 0 |
| 10.000 | <g><$CF_1$> | 10.000,00 | parcelas 1 e 2 |
| 2 | <g><$N_j$> | 2,00 | no. de períodos |
| 20.000 | <g><$CF_2$> | 20.000,00 | parcela 3 |
| 10.000 | <g><$CF_2$> | 10.000,00 | parcelas 4 a 6 |
| 3 | <g><$N_j$> | 3,00 | no. de parcelas |
| 10 | <i> | 10,00 | tx. desconto |
| | <f><NVP> | 61.065,74 | |

**R: R$61.065,74**

# 12. Métodos de Análise de Fluxo de Caixa

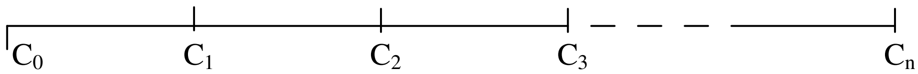
VPL = (Pr) = Valor Presente Líquido

TIR = r = Taxa Interna de Retorno

Custo de oportunidade ou taxa de atratividade mínima é a taxa que se pode obter em mercado, ou seja, representa uma alternativa disponível.

## *12.1 – Valor Presente Líquido*

Soma algébrica de todas as entradas e saídas de caixa, cada uma delas descontadas à taxa mínima de atratividade (custo de oportunidade), para uma mesma data escolhida como data de origem.
Este critério desconta o fluxo líquido a um instante de tempo, em geral a data presente.




$$P(r) = \sum_{j=0}^{n} C_j (1+r)^{-j}$$

Caso $C_j$, j = 1, 2 ... n, seja constante e positivo, tem-se uma série uniforme e seu valor presente pode ser obtido conforme a expressão:

$$P(r) = -C_0 + C_j \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right]$$

$$VPL = -I_0 + R \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i} \right]$$

## *12.2 Montagem da Função Valor Presente Líquido - (P(r))*

**VPL - C**omparação do valor do investimento com o valor presente das receitas futuras. É função da taxa de desconto e mede o lucro ou o prejuízo em termos absolutos.

**TAXA MÍNIMA DE ATRATIVIDADE -** Taxa de rentabilidade mínima que o projeto de investimento deve render para ser considerado rentável. Também denominada custo de oportunidade.

**TAXA MÁXIMA ADMITIDA -** Taxa de rentabilidade máxima (custo) a ser aceita em um projeto onde se avalia um financiamento a ser tomado.

**VPL** é função da taxa de desconto utilizada, tomada como Taxa Mínima de Atratividade no caso de um financiamento tomado como Taxa Máxima Admitida.

Fluxo de caixa de um investimento:
Fluxo de caixa de um investimento:

$$VPL = P(r) = -I_0 + \frac{R}{(1+r)} + \frac{R}{(1+r)^2} + ... + \frac{R}{(1+r)^n}$$

$$r = T_{Min}A$$

Fluxo de Caixa de financiamento:

$$VPL = P(r) = +I_0 - \frac{R}{(1+r)} - \frac{R}{(1+r)^2} - ... - \frac{R}{(1+r)^n}$$

$$r = T\ MA$$

VPL > 0 $\Longrightarrow$ significa que o projeto vale mais do que custa, ou seja, é lucrativo. Indica a rentabilidade do projeto (r) e o resultado (lucro).

VPL < 0 $\Longrightarrow$ significa que o projeto custa mais do que vale, ou seja, se for implementado trará prejuízo. Indica que a rentabilidade esperada do projeto não é suficiente, além do valor absoluto do resultado (prejuízo).

Exemplo:
Posso investir R$ 1.000.000,00 hoje em um projeto que promete produzir R$ 200.000,00 por ano nos próximos 9 anos. Devo aceitar o projeto?

- realmente 200 x 9 = 1.800.000 > 1.000.000
- no entanto, R$ 1.000.000,00 é gasto hoje enquanto que as receitas levarão 9 anos para retornar.

200.000 200.000 200.000 . . . 200.000

1.000.000 1 2 3 9

$$P(r) = -1.000.000 + \frac{200.000}{1+r} + \frac{200.000}{(1+r)^2} + 200.000.... + \frac{200.000}{(1+r)^9}$$

Dependendo da taxa mínima de atratividade a ser utilizada, o projeto VPL pode passar de positivo para negativo (ou vice e versa).

r = 10% $\Rightarrow$ VPL (10%) = 151.804
r = 15% $\Rightarrow$ VPL (15%) = -45.683
r = 13,70% $\Rightarrow$ VPL (13,70) = 0

## *12.3 Montagem da Função P(r)*

**A) VPL - INVESTIMENTO**

500 450 550 11.000

10.000

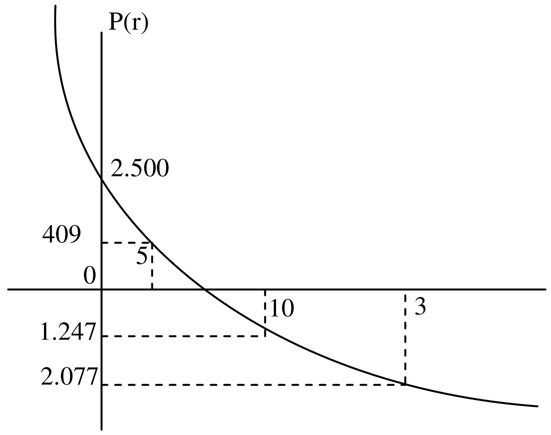
$$VPL = P(r) = -I_0 + \frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \frac{R_3}{(1+r)^3} + \frac{R_4}{(1+r)^4}$$

$$P(r = 0) = -10.000 + 500 + 450 + 550 + 11.000 = 2.500,00$$

$$P(r = 5\%) = -10.000 + \frac{500}{(1,05)} + \frac{450}{(1,05)^2} + \frac{550}{(1,05)^3} + \frac{11.000}{(1,05)^4} = 409,00$$

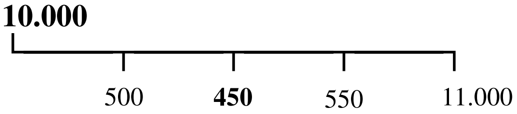
$$P(r = 10\%) = -10.000 + \frac{500}{(1,1)} + \frac{450}{(1,1)^2} + \frac{550}{(1,1)^3} + \frac{11.000}{(1,1)^4} = -1.247,18$$

$$P(r = 13\%) = -10.000 + \frac{500}{(1,13)} + \frac{450}{(1,13)^2} + \frac{550}{(1,13)^3} + \frac{11.000}{(1,13)^4} = -2.077,42$$




VPL > 0 quando
r ≤ TIR

**B) VPL - FINANCIAMENTO**



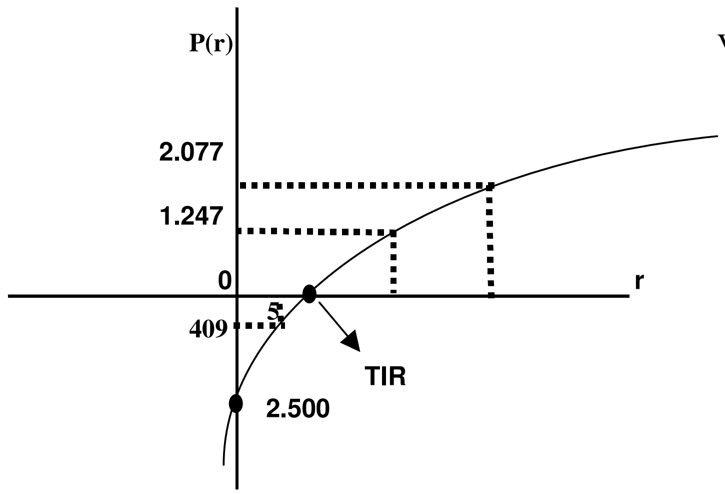

$$P(r) = +F_0 + \frac{P_1}{(1+r)} - \frac{P_2}{(1+r)^2} - \frac{P_3}{(1+r)^3} - \frac{P_4}{(1+r)^4}$$

$$P(r=0) = +10.000 + \frac{500}{(1{,}0)} - \frac{450}{(1{,}0)} - \frac{550}{(1{,}0)} - \frac{11.000}{(1{,}0)} = -2.500{,}00$$

$$P(r=5\%) = +10.000 + \frac{500}{(1{,}05)} - \frac{450}{(1{,}05)^2} - \frac{550}{(1{,}05)^3} - \frac{11.000}{(1{,}05)^4} = -409{,}00$$

$$P(r=10\%) = +10.000 + \frac{500}{(1{,}1)} - \frac{450}{(1{,}1)^2} - \frac{550}{(1{,}1)^3} - \frac{11.000}{(1{,}1)^4} = 1.247{,}18$$

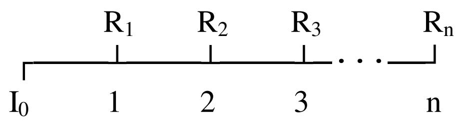
$$P(r=13\%) = +10.000 - \frac{500}{(1{,}13)} - \frac{450}{(1{,}13)^2} - \frac{550}{(1{,}13)^3} - \frac{11.000}{(1{,}13)^4} = 2.077{,}42$$




VPL > 0 quando
r ≥ TIR

## *12.4 Análise do VPL*

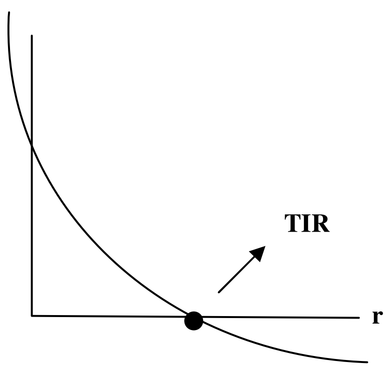
**A) INVESTIMENTO**



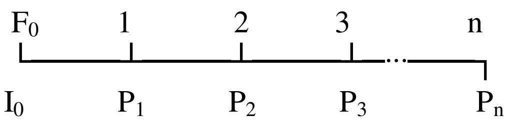

$$VPL = P(r) = -I_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j (1+r)^{-j}$$

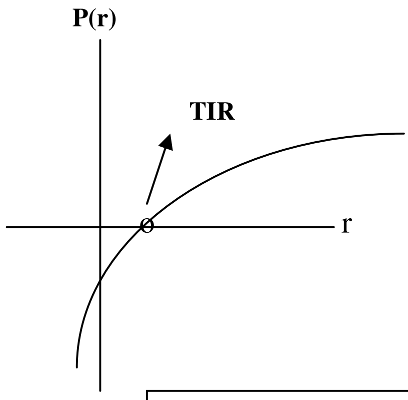
$$VPL = P(r) = \underbrace{-I_0}_{\text{SAÍDA}} + \underbrace{\frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \frac{R_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{R_n}{(1+r)^n}}_{\text{ENTRADAS}}$$

Se Entradas > Saídas $\Rightarrow$ VPL = P(r) > 0 $\Rightarrow$ logo, aceito o projeto



**B) FINANCIAMENTO**




$$VPL = P(r) = +F_0 - \sum_{j=1}^{n} P_j (1+r)^{-j}$$

$$VPL = P(r) = \underbrace{+F_0}_{\textbf{ENTRADA}} \underbrace{- \frac{P_1}{(1+r)} - \frac{P_2}{(1+r)^2} - \frac{P_3}{(1+r)^3} - \ldots - \frac{P_n}{(1+r)^n}}_{\textbf{SAÍDA}}$$

Se Entradas > Saídas
VPL = P(r) > 0 logo,
aceito o projeto

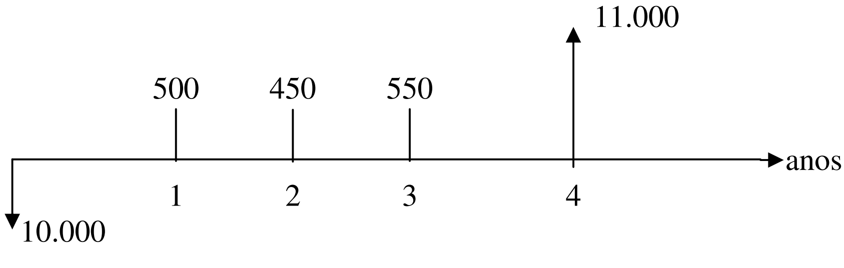
Exemplos:

1) Uma empresa deseja avaliar o fluxo de caixa de investimento num terreno. O valor inicial do investimento é de R$ 10.000,00. Devido à localização, estima-se possibilidade de vendê-lo após 4 anos por R$ 11.000,00. Taxa mínima de atratividade = 13% a.a., com o seguinte fluxo de caixa:

| ANO | ENTRADAS |
|---|---|
| 01 | 500 |
| 02 | 450 |
| 03 | 550 |

Calcule o VPL e verifique se o fluxo de caixa é atraente para a empresa.

SOLUÇÃO




$VPL = P(r) = -10.000 + 500\,(1+0,13)^{-1} + 450(1+0,13)^{-2} + 550(1+0,13)^{-3} + 11.000(1+0,13)^{-4}$

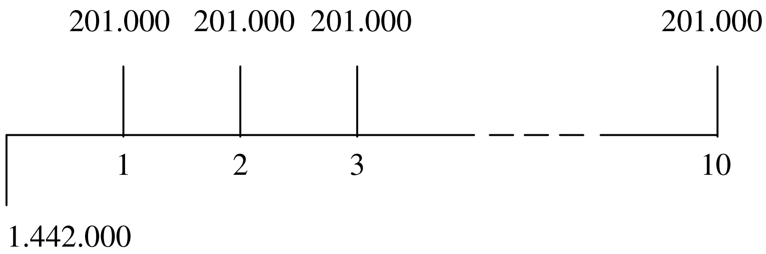
$VPL = P(r) = -\,2.077,42$

Já que $VPL = P(r) < 0$ $\Longrightarrow$ Investimento deve ser rejeitado

2) Uma empresa estuda a instalação de uma turbina de produção de energia elétrica. Atualmente a energia é comprada por R$ 280.000,00 ao ano. A turbina exigiria um investimento inicial de R$ 1.400.000,00, consumindo anualmente R$ 58.000,00 de manutenção e R$ 21.000,00 de mão de obra. Com vida útil de 10 anos e com impostos e seguros de 3% do investimento inicial e considerando nulo o valor salvo, que decisão deve ser adotada se a taxa de juros mínima é de 12% a.a.
Despesa Inicial = 1.400.000 x 1,03 = 1.442.000

| ANO | DESPESA | RECEITA | RESULTADO |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.442.000 | | -1.442.000 |
| 1 | 79.000 | 280.000 | 201.000 |
| 2 | 79.000 | 280.000 | 201.000 |
| ⋮ | | | |
| 10 | 79.000 | 280.000 | 201.000 |

FLUXO:




$$P(0,12) = -1.442.000 + \frac{201.000}{(1,12)} + \frac{201.000}{(1,12)^2} + .... + \frac{201.000}{(1,12)^{10}}$$

$$P(0,12) = -1.442.000 + R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n . i}\right]$$

$$P(0,12) = -1.442.000 + 201.000\left[\frac{(1,12)^{10} - 1}{(1,12)^{10} . 0,12}\right]$$

$$P(0,12) = -1.442.000 + 201.000\left[\frac{2,105848}{0,372701}\right]$$

$$P(0,12) = -1.442.000 + 1.135.694,83$$
P(0,12) = -306.305

**Pela HP12C**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| 10 | <n> | 10.000 | |
| 12 | <i> | 12.000 | |
| 201.000 | <CHS><PMT> | -201.000 | |
| | <VP> | 1.135.694,83 | |
| | <ENTER> | | |
| 1.442.000 | <CHS<+> | -306.305 | |

## O projeto deve ser rejeitado.

FLUXOS CONVENCIONAIS OU NÃO

Estabelece $i_{min}$ e compara                Estabelece $i_{máx}$ e compara

| INVESTIMENTO | | FINANCIAMENTO | |
|---|---|---|---|
| VPL > 0 | ACEITA | VPL > 0 | ACEITA |
| VPL = 0 | ACEITA | VPL = 0 | ACEITA |
| VPL < 0 | REJEITA | VPL < 0 | REJEITA |

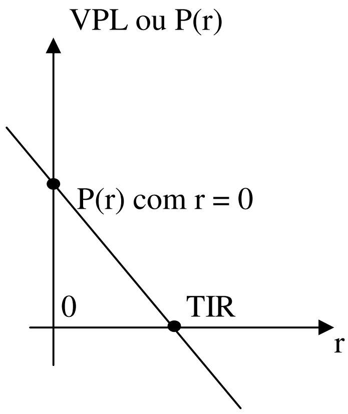
**O valor atribuído hoje aos recebimentos futuros supera o valor do investimento inicial necessário à implantação do projeto.**

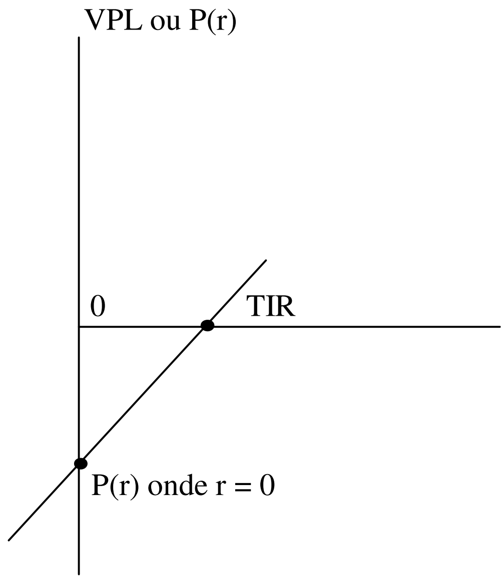
# 13. Taxa Interna de Retorno - TIR

É a taxa de desconto que iguala o valor presente das receitas ao valor presente dos investimentos. Quanto maior a TIR, maior a atratividade do investimento.
A TIR é aquela que permite igualar a zero a expressão:

$$TIR = P(r) = C_0 + \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + .... + \frac{C_n}{(1+r)^n} = 0$$

A utilização da TIR envolve a sua comparação com uma taxa de atratividade mínima (custo de oportunidade), quando se trata de um projeto de investimento e uma taxa máxima admitida se o fluxo é de um financiamento.

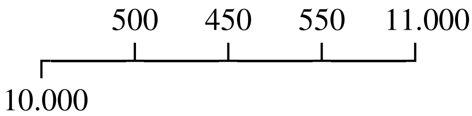



A TIR é obtida pela interpolação de dois valores, um positivo (próximo de zero) e um negativo (próximo de zero) da função P(r). Este é o método de Newton Raphson, utilizado pelas calculadoras eletrônicas.

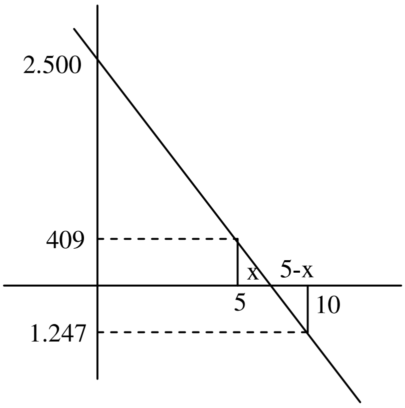
# 13.1 Cálculo Manual da TIR

**A) INVESTIMENTO**




$$P(r) = -I_0 + \frac{500}{(1+r)} + \frac{450}{(1+r)^2} + \frac{550}{(1+r)^3} + \frac{11.000}{(1+r)^4}$$

**P (r = 0) = 250**
**P(r = 5%) = 409**
**P(r = 10%) = -1.247**



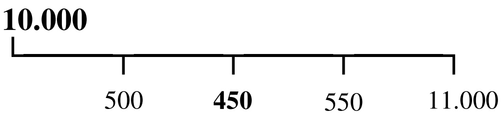

$$\frac{x}{409} = \frac{5-x}{1247}$$
$$1247x = 2045 - 409x$$
$$1656x = 2045$$
$$x = \frac{2045}{1656} = 1{,}24$$

$$\log o,\ TIR = 5 + 1{,}24 = 6{,}24$$

**NA MÁQUINA**

| | | |
|---|---|---|
| 10.000 | CHS | $CF_0$ |
| 500 | | $CF_J$ |
| 450 | | $CF_J$ |
| 550 | | $CF_J$ |
| 11.000 | | $CF_J$ |
| f | IRR | 6,13 |

**B) FINANCIAMENTO**




| |
|---|
| **P (r = 0%) = - 2500** |
| **P(r = 5%) = - 409** |
| **P(r = 10%) = -1.247** |

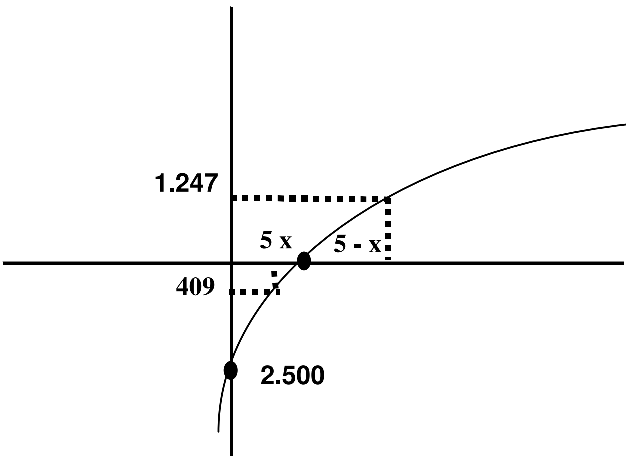
$$\frac{x}{409} = \frac{5 - x}{1247}$$

$$1247x = 2045 - 409x$$

$$1656x = 2045$$

$$x = \frac{2045}{1656} = 1,23$$

$$\log o,\ TIR = 5 + 1,24 = 6,24$$




$$\frac{X}{409} = \frac{5 - X}{1247} = x = 1,24$$

$$\log o TIR = 6,24$$

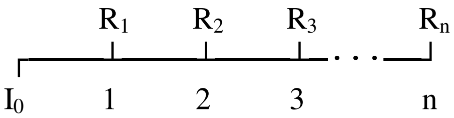
**NA MÁQUINA**

| | | |
|---|---|---|
| 10.000 | $CF_0$ | |
| 500 | CHS | $CF_J$ |
| 450 | CHS | $CF_J$ |
| 550 | CHS | $CF_J$ |
| 11.000 | CHS | $CF_J$ |
| f | IRR | 6,13 |

## *13.2 Análise da TIR - Taxa Interna de Retorno*

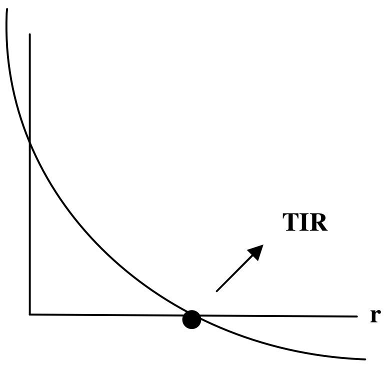
**TIR É A TAXA DE JUROS QUE ZERA O VPL**

**A) INVESTIMENTO**



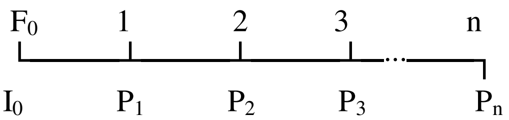

$$VPL = P(r) = -I_0 + \sum_{j=1}^{n} R_j (1+r)^{-j} = 0$$

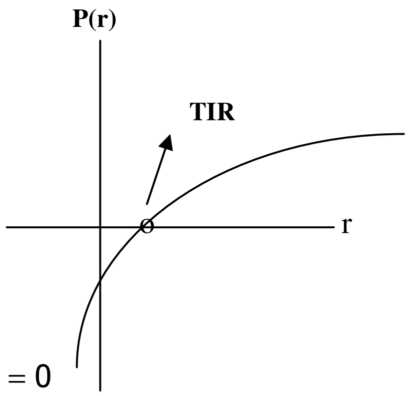
$$VPL = P(r) = -I_0 + \frac{R_1}{(1+r)} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \frac{R_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{R_n}{(1+r)^n} = 0$$




O projeto é bom se TIR > TMA
O projeto é ruim se TIR < TMA, pois
senão prefiro TMA
senão VPL < 0

**B) FINANCIAMENTO**



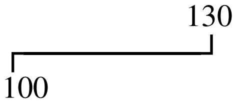

$$VPL = P(r) = +F_0 - \sum_{j=1}^{n} P_j (1+r)^{-j} = 0$$

$$VPL = P(r) = +F_0 - \frac{P_1}{(1+r)} - \frac{P_2}{(1+r)^2} - \frac{P_3}{(1+r)^3} - \ldots - \frac{P_n}{(1+r)^n} = 0$$

O projeto é bom se TIR < TM$_{ax}$A
O projeto é ruim se TIR > TMA, pois
senão prefiro TMA
senão VPL < 0

## *13.3 Análise do VPL e da TIR*

### Fluxo Investimento



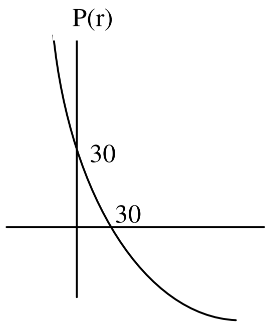

$$-100+\frac{130}{1+r}=0$$

$$-100+\frac{130}{1,3}=0$$

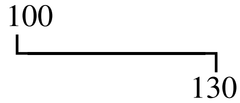
$$\text{TIR}=30\%$$

$$\text{TMA}=10\%,$$

$$\text{VPL}=-100+\frac{130}{1,1}=18,2$$




### Fluxo Financiamento



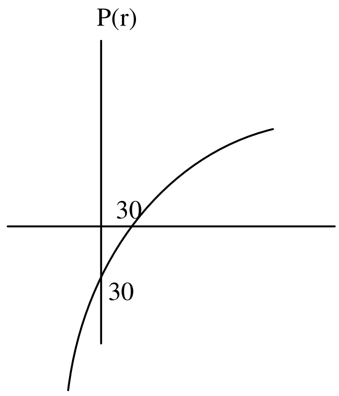

$$+100-\frac{130}{1+R}=0$$

$$+100-\frac{130}{1,3}=0$$

$$\text{TIR}=30\%$$

$$\text{TMA}=10\%,$$

$$\text{VPL}=+100-\frac{130}{1,1}=18,2$$




**ANÁLISE VPL**

Aceito se VPL > 0
Entradas > saídas
Rejeito se VPL < 0

aceito se VPL > 0
entradas > saídas
rejeito se VPL < 0

**ANÁLISE TIR**

Aceito se TIR > TMA
Rejeito se TIR < TMA

aceito se TIR < $TM_{ax}A$
rejeito se TIR > $TM_{x}A$

**RESUMO**

| INVESTIMENTO | | PAGAMENTO | |
|---|---|---|---|
| TIR > $i_{mín}$ | ACEITA | TIR > $i_{máx}$ | REJEITA |
| TIR = $i_{mín}$ | ACEITA | TIR = $i_{máx}$ | ACEITA |
| TIR < $i_{mín}$ | REJEITA | TIR < $i_{máx}$ | ACEITA |

## *13.4 Interpretação da TIR*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 20.000 | 40.000 | 45.000 | 30.000 |
| 70.000 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Cálculo da TIR deste fluxo = 30,03%

O que significa a TIR? Efetiva taxa de rentabilidade anual do projeto, mas não pode ser considerada taxa de ganho efetivo em cada período, a menos que as receitas sejam reinvestidas à mesma TIR.

Admita o VF do fluxo acima (receitas)

$VF_R = 20.000\ (1{,}3003)^3 + 40.000\ (1{,}3003)^2 + 45.000\ (1{,}3003) + 30.000$

$VF_R = 43.970{,}43 + 67.631{,}20 + 58.513{,}50 + 30.000 = 200.115{,}13$

$$r = \left[\left(\frac{200.115{,}13}{70.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right]100 = 30{,}03\%$$

Prova:

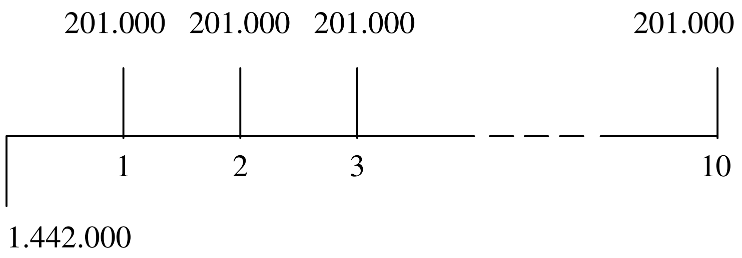
Suponha que o fluxo acima tenha as receitas reaplicadas à taxa de 22% a.a. (ao invés de 30.03% a.a.).

$VF_R = 20.000\ (1{,}22)^3 + 40.000\ (1{,}22)^2 + 30.000$

$VF_R = 36.316{,}96 + 59.536{,}00 + 54.900{,}00 + 30.000 = 180.752{,}96$

$$r = \left[ \left( \frac{180.752,96}{70.000} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] 100 = 26,76\% \text{ a.a., a despeito de} \quad \text{a TIR} = 30,03\% \text{ a.a.}$$

Veja exemplo da instalação da turbina. Que decisão deve ser tomada sob o método da TIR?




$$P(r) = -1.442.000 + \frac{201.000}{(1+r)} + \frac{201.000}{(1+r)^2} + .... + \frac{201.000}{(1+r)^{10}} = 0$$

Qual é a r ?

---

Para r = 0 ⟹ P(0) = -1.442.000 + 201.000 + 201.000 + .... + 201.000

P(0) = 568.000

---

Para r = 5% ⟹ $P(0,05) = -1.442.000 + 201.000 \left[ \frac{(1,05)^{10} - 1}{(1,05)^{10} \, . \, 0,05} \right]$

P(0,05) = -1.442.000 + 1.552.068

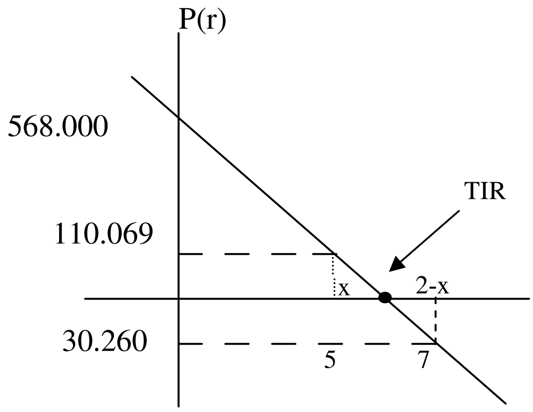
P(0,05) = 110.069

---

Para r = 7% ⟹ $P(0,07) = -1.442.000 + 201.000 \left[ \frac{(1,07)^{10} - 1}{(1,07)^{10} \, . \, 0,07} \right]$

P(0,07) = -1.442.000 + 1.441.740

P(0,05) = -30.260




Cálculo da TIR

$$\frac{x}{110.069}=\frac{2-x}{30.260}\Rightarrow 30.260x = 220.138 - 110.069x$$

$140.329x = 220.138$

$$x=\frac{220.138}{140.329}=1,57$$

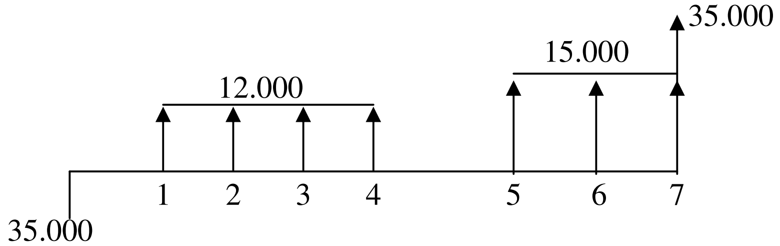
TIR = 5,00 + 1,57 = 6,57%

Como a taxa de atratividade exigida no projeto é de 12%, ele deve ser rejeitado.

**Pela HP12C**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| | <f><CLEAR><REG> | | limpa registro |
| 1.442.000 | <CHS><g><$CF_0$> | -1.442.000,00 | invest. ano 0 |
| 201.000 | <g><$CF_1$> | 201.000,00 | valor da parc. |
| 10 | <g><$N_j$> | 10,00 | n$^o$ de parc. |
| | <f><IRR> | 6,54 | TIR |

Sua empresa tem oportunidade de investir em um projeto com vida útil de sete anos. O investimento inicial é de R$ 35.000,00 e receitas de R$ 12.000,00 nos quatro primeiros anos e R$ 15.000,00 nos três anos seguintes. O preço final de venda é de R$20.000,00. Calcule a TIR e avalie o projeto admitindo uma TMA = 20% a.a.




$$P(0) = -35.000 + \frac{12.000}{(1+r)} + \frac{12.000}{(1+r)^2} + \frac{12.000}{(1+r)^3} + \frac{12.000}{(1+r)^4} + \frac{15.000}{(1+r)^5} + \frac{15.000}{(1+r)^6} + \frac{35.000}{(1+r)^7}$$

$$P(0{,}33) = -35.000 + \frac{12.000}{1{,}33} + \frac{12.000}{1{,}33^2} + \frac{12.000}{1{,}33^3} + \frac{12.000}{1{,}33^4} + \frac{15.000}{1{,}33^5} + \frac{15.000}{1{,}33^6} + \frac{35.000}{1{,}33^7}$$

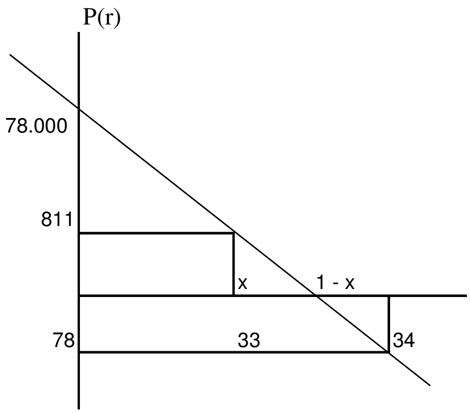
P(0,33) = -35.000 + 9.022,56 + 6.783,88 + 5.100,66 + 3.835,08 + 3.604,40 + 2.710,08 + 4.754,52

P(0,33) = 811,18

$$P(0{,}34) = -35.000 + \frac{12.000}{1{,}34} + \frac{12.000}{1{,}34^2} + \frac{12.000}{1{,}34^3} + \frac{12.000}{1{,}34^4} + \frac{15.000}{1{,}34^5} + \frac{15.000}{1{,}34^6} + \frac{35.000}{1{,}34^7}$$

P(0,34) = -35.000 + 8.955,22 + 6.683,00 + 4.987,31 + 3.721,88 + 3471,90 + 2.590,97 + 4.511,64

**P(0,34) = -78,08**



$$\frac{x}{811} = \frac{1-x}{78} \Rightarrow 78x = 811 - 11x$$

$$889x = 811$$

$$x = \frac{811}{889} = 0{,}91$$

$$TIR = 33 + 0{,}91 = 33{,}91\%a.a.$$

**Pela HP-12C**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| | <f><CLEAR><REG> | | limpa registro |
| 35.000 | <CHS><g><$CF_0$> | -35.000,00 | invest. ano 0 |
| 12.000 | <g><$CF_1$> | 12.000,00 | parcela ano 1 a 4 |
| 4 | <g><$N_j$> | 4,00 | nº de parc. |
| 15.000 | <g><$CF_j$> | 15.000,00 | parcela ano 5 a 6 |
| 2 | <g><$N_j$> | 2,00 | nº de parc. |
| 35.000 | <g><$CF_j$> | 35.000,00 | parcela ano 7 |
| | <f><IRR> | 33,91 | TIR |

Como TIR > Tx. Atratividade, o projeto deve ser aceito.

## *13.5 – Desvantagem do Método da TIR*

A função P(r) comparada a zero corresponde a um polinômio onde nada garante que sua raiz seja sempre positiva e única. Podem ocorrer raízes múltiplas, reais e imaginárias, positivas ou negativas.

TEOREMA DOS SINAIS DE *DESCARTES*
O número de raízes positivas da equação

$$F(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx = 0$$

não ultrapassa o número de variações na seqüência dos sinais dos coeficientes e, se for inferior, diferirá de um número par.

Assim, projetos convencionais que possuem apenas uma inversão de sinal de seqüência dos fluxos, terão apenas uma raiz ou nenhuma.

## 13.6 – Condições de Soper

Dada $C_0 \quad C_1 \quad C_2 \ldots.. \quad C_n$, onde

$C_0 < 0$ , é o investimento inicial

$C_1 > 1 \ldots C_n > 0$ , são receitas e

$C_1 + \ldots C_n > | C_0 |$

Haverá apenas uma mudança de sinal e, logo, uma raiz positiva.

EXEMPLOS

1) Determinar a TIR relativa a um empréstimo de R$ 126.900,00 a ser liquidado em quatro pagamentos mensais e consecutivos de R$ 25.000,00, R$ 38.000,00, R$ 45.000,00 e R$ 27.000,00.

126.900

25.000 38.000 45.000 27.000

$$126.900 - \frac{25.000}{(1+r)} + \frac{38.000}{(1+r)^2} + \frac{45.000}{(1+r)^3} + \frac{38.000}{(1+r)^4} = 0$$

Pela HP-12C: LIMPAR

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 126.900 | g | | $CF_0$ | |
| 25.000 | CHS | g | $CF_J$ | |
| 38.000 | CHS | g | $CF_J$ | |
| 45.000 | CHS | g | $CF_J$ | |
| 27.000 | CHS | g | $CF_J$ | |
| | f | IRR | = | 2,47% a.m. |

---

$$P(r = 2\%) = 126.900 - \frac{25.000}{1,02} + \frac{38.000}{(1,02)^2} + \frac{45.000}{(1,02)^3} + \frac{38.000}{(1,02)^4} =$$

$$126.900 - 24.509,80 + 36.524,41 + 42.404,50 + 24.943,83$$

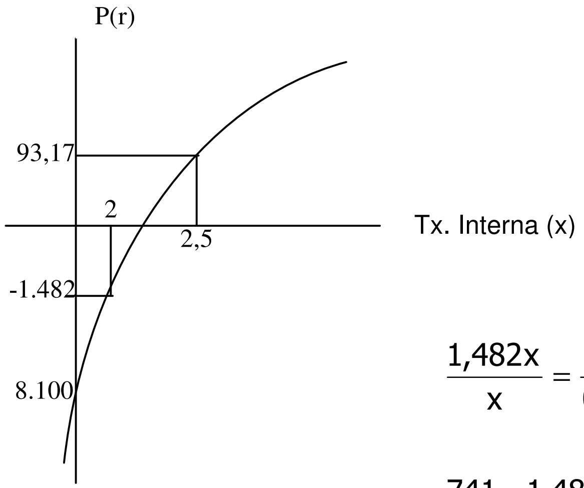
$$P(r = 2\%) = -1.482,54$$

---

$$P(r = 2{,}5\%) = 126.900 - \frac{25.000}{1{,}025} + \frac{38.000}{(1{,}025)^2} + \frac{45.000}{(1{,}025)^3} + \frac{38.000}{(1{,}025)^4} =$$

$$126.900 - 24.390{,}24 + 36.168{,}95 + 41.786{,}97 + 24.460{,}67$$

$$P(r = 2{,}5\%) = 93{,}17$$




$$\frac{1{,}482x}{x} = \frac{93{,}17}{0{,}5 - x}$$

$$741 - 1{,}482x = 93{,}17x$$
$$741 = 1.575{,}17x$$
$$x = \frac{741}{1.575{,}17} = 0{,}47$$

TIR = 2 + 0,47 = 2,47% am.

Prova:

VF = 25.000 $(1{,}0247)^3$ + 38.000$(1{,}0247)^2$ + 45.000(1,0247) + 27.000 =

= 26.898,63 + 39.900,38 + 46.111,50 + 27.000 = 139.910,51

$$i = \left(\frac{139.910{,}51}{126.900{,}00}\right)^{\frac{1}{4}} - 1x100 = 2{,}47\% \quad a.m.$$

# 14 - Lista de Exercícios

## 14.1 Revisão de Matemática

1) $$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}22$$

$x = ???$

Pela HP12C

**R: 34,75%**

Atenção: x é um percentual.

---

2) $$\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{1{,}222}$$

Pela HP12C

Se "i" é taxa de juros e o prazo é em meses, posso admitir tratar-se de uma taxa trimestral.

**R: 16,23%**

3) $$\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{30}{360}}=1{,}02$$

**R: 26,82% a.a. (dc)**

---

4) $$\left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{1}{252}}=1{,}00070718$$

**R: 19,50% a.a. (du)**

---

5) $$\left(1+\frac{20}{100}\right)^{\frac{30}{360}}=???$$

**R:1,53% a.m.**

---

6) $$\left(1+\frac{20}{100}\right)^{\frac{21}{252}} = ???$$

**R: 1,53% a.m.**

---

7) $$\left(1+\frac{20}{100}\right) = \left(1+\frac{i}{100}\right)^{12} \Rightarrow i = ?$$

**R: 1,53% a. m.**

---

8) Avalie a diferença entre os três últimos resultados e explique porque são iguais?

---

9) $$\left(1+\frac{20}{100}\right) = \left(1+\frac{i}{100}\right)^{\frac{4}{12}} \Rightarrow i = ???$$

**R: 72,80% a.a.**

---

10) $$\left(1+\frac{i_a}{100}\right)=\left(1+\frac{i_m}{100}\right)^{12}$$ ; se $i_a$ = taxa anual e $i_m$ = taxa mensal,

calcule $i_m$ :

R:

---

11) $$\left(1+\frac{i_{TRI}}{100}\right)^{4}=\left(1+\frac{i_a}{100}\right)$$ ;

Calcule $i_{TRI}$, sabendo tratar-se de uma taxa trimestral.

$i_{TRI}$ =

---

**Calculando pela HP12C**

12) $$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}=1{,}6$$

**R: x = 102,39%**

---

13) $x^2 = 5^{\frac{2}{3}}$

R: x = 1,71

---

14) $x^5 = 5^{\frac{2}{3}}$

**R: 1,24**

---

## *14.2 Regras de Potência*

1) $y^3 = 27$

**R: 3**

2) $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}5$

**R: 22,47%**

**Usando a HP 12C**

**1)**

| **CÁLCULO** | **OPERAÇÃO** | **VISOR** |
|---|---|---|
| $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ | | 0,25 |
| $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}25$ | | 0,125 |
| $3^7 = 2.187$ | | 2.187 |
| $1{,}5^3 = 3.375$ | | 3,375 |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (0{,}333)^{-2} = \frac{1}{0{,}333^2} = 9$ | | 9,00 |
| | | 9,00 |

Para calcular uma potência fracionária, digite o valor da base, tecle ENTER, digite o valor do denominador, tecle <1/x>, em seguida tecle <$y^x$>, então digite o valor do numerador e tecle <$y^x$>.

**2)**

| **CÁLCULO** | **OPERAÇÃO** | **VISOR** |
|---|---|---|
| $2^{3/4}$ | | 1,68 |
| $3^{1/5}$ | | 1,25 |
| $4^{5/3}$ | | 10,08 |
| $1{,}5^{3/2}$ | | 1,84 |
| $0{,}7^{2/5}$ | | 0,87 |

3)

| **CÁLCULO** | **OPERAÇÃO** | **VISOR** |
|---|---|---|
| $2^{3/4}$ | | 1,682 |
| $2^{-3/4}$ | | 0,595 |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ | | 27 |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ | | 0,037 |

## *14.4 Descontos Bancários*

1) $E = R\$25.000,00$
   $d = 2\%$ a m
   $n = 4$ meses.
   $D_f = ?$
   $D_d = ?$
   $i_{ef} = ?$

$D_d =$

$D_f =$

$i = .$

De fato:

**R: <u>$D_d = R\$1.851,85$;</u> <u>$D_f = R\$2.000,00$;</u> <u>$i_{ef} = 2,174\%$ a.m.</u>**

2) Se $i = d$, por que $D_d < D_f$?

**<u>R:</u>**

3) Se $i = d$, por que $C_{od} > C_{of}$?

**<u>R:</u>**

4) Deduza a fórmula para calcular o desconto por fora em função do desconto por dentro?

**R:**

5) Desenvolva a fórmula para obter a taxa efetiva de desconto por dentro a partir da taxa de desconto por fora?

**R:**

6) Idem em relação à taxa de desconto por fora e o IOF.

**R:**

7) Idem incluindo a reciprocidade.

**R:**

8) $E = R\$10.000,00$
$d = 10\%$ a m
$t_{IOF} = 0,123\%$ a m
$n = 3$ meses
Calcule $i_{ef}$ pela formula e pelo desconto.

De fato:

**R: 14,538% a.m.**

9) E = R$10.000,00
d = 10% a m
$t_{IOF}$ = 0,123% a m
n = 3 meses
$\alpha$ = 10%
Calcule $i_{ef}$ pela formula e pelo desconto.

**R: 16,98% a.m.**

## *14.5 Juros Simples*

1) Determinar os juros e o valor de resgate de um empréstimo de R$50.000,00, com taxa de juros de 5% a m , no prazo de três trimestres?

**R: R$22.500,00 e R$72.500,00**

2) Um capital de R$30.000,00 aplicado durante cinco meses rende juros de R$1.500,00. Determinar a taxa de juros da operação.

**R: 1% a m**

3) Determinar o valor do capital inicial necessário para produzir o montante de R$4.000,00 daqui a cinco bimestres, sabendo que a taxa de juros é de 2% a m.

**<u>R: R$3.333,33</u>**

4) Quantos meses são necessários para que um investimento de R$1.500,00 se transforme no montante de R$3.000,00, a uma taxa de juros de 2% a b?

**<u>R: 100 meses</u>**

5) Calcule os juros e o montante de um empréstimo de R$400.000,00 com prazo de 175 dias, à taxa de 9% a.a. (ano comercial).

**<u>R: R$17.500,00 e R$417.500,00</u>**

6) Determinar o valor de resgate de um capital que, aplicado por seis semestres, à taxa de 30% a.a. rende R$60.000,00 de juros?

**<u>R: R$126.666,67</u>**

7) Depois de quantos meses um investimento dobra de valor, considerando uma taxa de juros de 10% a.a.?

**R: 120 meses**

8) Sabendo que a taxa de juros é de 3% a m, determinar o valor hoje das seguintes obrigações:
   - R$2.000,00 devidos hoje
   - R$4.000,00 devidos em seis meses
   - R$12.000,00 devidos em 15 meses

**R: R$13.665,69**

## *14.6 Juros Compostos*

1) Calcule o valor futuro de R$1000 capitalizados anualmente, para:

a) 10 anos a 5%
b) 10 anos a 7%
c) 20 anos a 5%
d) Por que os juros obtidos no item c não são iguais ao dobro dos obtidos no item a?

**R: a) R$ 1.628,89 b) R$ 1.967,15 c) R$ 2.653,30 d) JC**

2) Você prefere receber R$1.000 hoje ou R$2.000 daqui a 10 anos, se a taxa de juros é de 8% a.a.?

**R: Prefiro R$ 1.000 hoje**

3) Você ganhou um prêmio e lhe oferecem duas opções:
R$10.000 daqui a 1 ano;
R$20.000 daqui a 5 anos.

Qual sua escolha se a taxa de juros for:

a) 0%;
b) 10%;
c) 20%
d) Qual a taxa de juros que torna as duas opções indiferentes?

**R: a) escolho a segunda  b) escolho a segunda**
**c) escolho a primeira  d) 18,92% a.a.**

4) Posso fazer um investimento hoje no valor de R$900.000,00. Terei no final do primeiro ano uma receita de R$120.000,00, no segundo R$250.000,00 e no terceiro R$800.000,00. Se a taxa de juros é de 12% aa, devo fazer o investimento ou não?

**R: VPL = - R$ 24.134,48 logo não deve**

5) Considerando o exercício anterior, se r = 11%aa, como fica?

**R: VPL = - R$ 41.033,18, logo não deve**

6) Sua empresa vendeu hoje um ativo por R$90.000. O pagamento será feito daqui a 5 anos. O custo de produção do ativo é de R$60.000. Se r = 10% a.a.,
   a) haverá lucro?
   b) Qual a taxa que não há lucro nem prejuízo?

**R: a) Não haverá lucro** **b) 8,45% a.a.**

7) Um banco lhe oferece 3 tipos de empréstimos a taxa de juros de 16% a.a. Quanto você tomaria emprestado hoje, se as condições de pagamento fossem:
   a) um pagamento anual de R$1.200 por 5 anos;
   b) um pagamento trimestral de R$300 por 10 anos;
   c) um pagamento mensal de r$100 por 15 anos.

**R: a) R$ 3.929,15** **b) R$ 5.937,83** **c) R$ 6.808,74**

8) Determinar o valor de resgate de uma aplicação de R$ 15.000,00 à taxa de juros de 1,8% a.m. por um prazo de quatro semestres.

**Pela HP12C**

**<u>R: R$ 23.016,43</u>**

9) Calcular o capital necessário para produzir um montante de R$ 23.000,00, à taxa de juros de 18,20% a.a., daqui a 288 dias.

**<u>R: R$ 20.120,27</u>**

10) Determinar o prazo necessário para um capital dobrar, a uma taxa de 12% a.a.

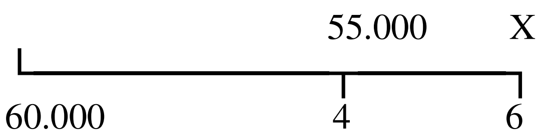
**Pela HP12C**

**<u>R: 6,12 anos</u>**

11) Qual a taxa de juros (anual) que produz um montante de R$ 68.000,00 a partir de um investimento de R$ 45.000,00 no final de 8 anos?

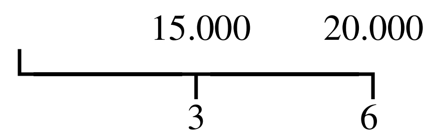
**R: 5,296% a.a.**

12) Um empresário compra um equipamento no valor de R$ 80.000,00. Paga R$ 20.000,00 à vista e se compromete a pagar R$ 55.000,00 em 4 meses. Sabendo que a taxa de juros é de 2% a.m., determinar o pagamento a ser feito no final do 6º mês para liquidar a dívida?




**R: R$ 10.347,75**

13) Um clube de futebol possui uma dívida com um banco, cujos pagamentos de R$15.000,00 e R$20.000,00 vencem daqui a 3 e 6 meses, respectivamente. O clube procurou o banco e propôs liquidar a dívida com um pagamento único de R$ 30.000,00. Determinar a época em que deve ser feito esse pagamento, se a taxa de juros é de 5% a.m.




**R: 1,5 mês**

## *14.7 Taxas Equivalentes*

1) Determinar a taxa mensal equivalente a:

a) 6% a.t.;

**R: 1,96% a.m.**

b) 24% a.s.;

**R: 3,65% a.m**

c) 36% a.a.

**R: 2,60% a.m.**

2) Determinar a taxa diária equivalente a 25% a.a. assumindo ano civil (365 dias)

**R: 0,06% a.d.**

3) Determinar a taxa efetiva anual equivalente às taxas (ano comercial):

a) 12% a.a. capitalizada diariamente

**R: 12,75% a.a.**

b) 12% a.a. capitalizada mensalmente

**R: 12,68% a.a**.

c) 12% a.a. capitalizada bimestralmente

**R: 12,62% a.a.**

d) 12% a.a. capitalizada trimestralmente

**R: 12,55% a.a.**

e) 12% a.a. capitalizada semestralmente

**R: 12,36% a.a.**

4) Sendo 17% a.a. capitalizada semestralmente, qual a taxa efetiva anual?

**R:17,72% a.a.**

5) Sendo 12% a.s. capitalizado trimestralmente, qual a taxa efetiva semestral?

**R: 12,36% a.s.**

6) Sendo 5% a.t. capitalizado mensalmente, qual a taxa efetiva trimestral?

**R: 5,08% a t**

7) Sendo 3% a.b. capitalizado mensalmente, qual a taxa efetiva bimestral?

**R: 3,02 % a.b.**

8) Sendo 1,5% a.m. capitalizado diariamente, qual a taxa efetiva mensal?

**R: 1,51% a.m.**

## *14.8 Valor Nominal, Valor Presente e Valor Futuro*

1) Qual o valor nominal de uma nota promissória de R$ 7.575,76, assinada hoje com vencimento daqui a 10 meses, se a taxa de aplicação for de 38,4% a.a.(JS)?

**R: R$10.000,00**

2) O valor nominal de uma nota promissória é de R$ 4.770,00. Qual seu valor atual 3 meses antes do vencimento, se a taxa de juros efetiva composta é de 24% a.a.?

**R: R$4.520,26**

3) Certa pessoa aplicou R$ 10.000,00 à taxa efetiva de 29% a.a. (JC) pelo prazo de 9 meses, com capitalização mensal. Dois meses antes da data do vencimento, transferiu a aplicação para um amigo. Na ocasião, a taxa de juros vigente em mercado era de 32%. Qual é o valor do título em mercado por ocasião da transferência?

**R: R$11.558,54**

## *14.9 Letras do Tesouro Nacional*

1) LTN
   30 dias corridos - 21 dias úteis
   PU = 988,063456

Perguntas:

a) Qual a taxa efetiva anual?
b) Sabendo que $r_a$ = 10% a.a., qual a expectativa de inflação no ano e no período?
c) Calcule o PU no 10°. dia útil
d) Se no 10°. dia útil (9 decorridos), a expectativa de inflação passa para 8% a.a., qual deve ser o PU desse título em mercado?
e) Supondo que você tenha 1.000.000 dessas LTN, qual o seu lucro/prejuízo no dia?

Respostas:

a)

**R: 15,50% a.a.**

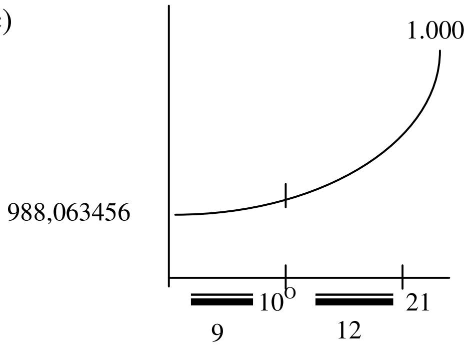
---

b) No ano:

No período:

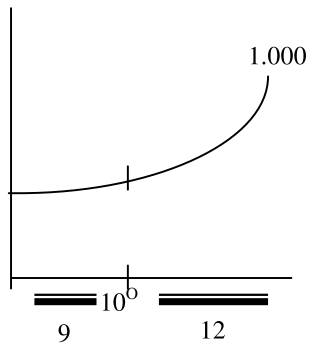
**R: 0.4074% no período**

c)




**R: 993, 161571**

d)




Nova taxa efetiva anual =1,10 x 1,08 =1,1880

$PU_{10^{o}\,du} =$

**R: 991,830165**

e) Prejuízo:

**R: prejuízo de R$1.331.406,64**

2) Uma aplicação no overnight de R$ 650.000,00 é resgatada no dia seguinte por R$650.452,83. Qual a taxa efetiva anualizada da operação?

**R: 19,18% a.a.**

---

3) Suponha: $\Pi^* = 8\%$ a.a.
$I_{ef} = 22\%$ a.a.
Mês com 20 dias úteis

a) Qual a taxa de juro real ao ano?
b) Qual a taxa de juro real acumulada no mês (20 du)?
c) Qual a taxa efetiva mensal (acumulada)
d) Qual a taxa efetiva do overnight?
e) Qual a taxa de inflação acumulada no mês?

Respostas

a)

**R: 12,963% a.a.**

---

b)

**R: 0,972% a.m.**

---

c)

**R: 1,59% a.m**

---

d)

**R: 0,07894% a.d.u.**

---

e)

**R: 0,61267% no mês**

4) Suponha:

$$\Pi_a^* = 6\% \text{ a.a.}$$

1º. mês $i_{efa} = 18{,}50\% \text{ a.a.}$

$$du = 21$$

$$\Pi_a^* = 5{,}7\% \text{ a.a.}$$

2º. mês $r_a = 12{,}58278\% \text{ a.a.}$

$$du = 18$$

Perguntas:

a) Qual a taxa de juro real do primeiro mês e a taxa efetiva do segundo mês?
b) Qual a taxa efetiva acumulada em cada mês?
c) Qual a taxa efetiva acumulada no período compreendido entre o 5º. dia útil do primeiro mês e o 12º. dia útil do segundo mês?
d) Anualize a taxa obtida no item anterior.

Respostas:

a) 1º. mês

2º. mês

**R: 1º mês = 11,79% a. a.;** **2º mês = 19% a. a.**

b) 1º. mês

2º. mês

**R: 1º mês = 1,42% no mês;** **2º mês = 1,25% no mês**

c)

4 17 11 7

21 18

**<u>R: 1,92% no período</u>**

---

d)

**<u>R: 18,70 % a.a.</u>**

---

E a taxa média diária no período?

$i_{ef}$ média diária nos 28 dias =

**<u>R: 0,068% a.d.u.</u>**

---

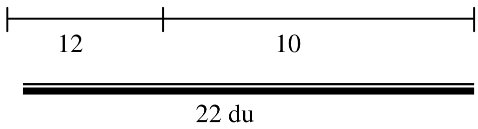
5) LTN
33dc = 22du
PU = 985,181630

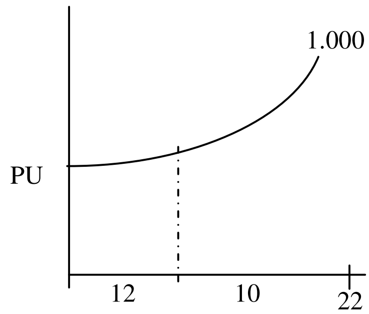
Perguntas:

a) Qual a taxa efetiva no prazo do título?
b) Qual a taxa efetiva anual correspondente ao título?
c) Se a taxa de inflação esperada é de 5% a.a., qual a taxa de juro real?
d) Calcule o PU no 13º. dia útil (12 du decorridos)
e) Se no 13º. dia útil, a expectativa de inflação passa a ser de 8% a.a., qual a nova taxa efetiva anual e qual a taxa efetiva anual correspondente ao prazo do título?

f) Supondo que a nova taxa efetiva anual esteja em vigor a partir do 13º. dia útil, qual é o PU de mercado desse título?

g) Se você dispõe de 1.000.000 dessas LTN, apure o lucro ou prejuízo no 13º. du em função da oscilação do preço do título.




Respostas:

a)

**<u>R: 1,50% no período</u>**

---

b)

**<u>R: 18,65% a.a.</u>**

---

c)

**<u>R: 13% a.a.</u>**

---

d)

**<u>R: 993,236946</u>**

---

e) Nova $i_{efa}$ = (1,08x1,13)-1x100 = 22,04% a.a.

Nova $i_{ef\ prazo}$ =

**<u>R: 20,179% a.a.</u>**

f)

**R: 992.127235**

---

g)

**R: prejuízo de R$1.109.711,20**

---

6) $n$ = 28 dias corridos (20 du)
$i_{selic}$ média = 19,50% a.a.
PU = ?


**R: 985,960894**

---

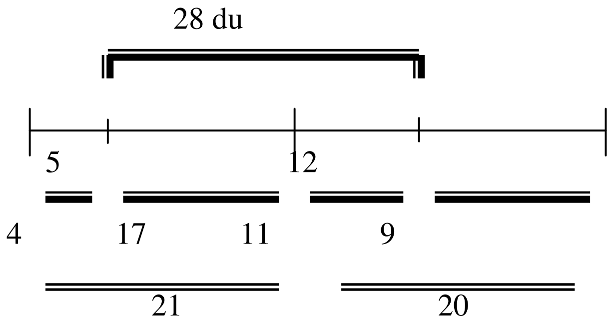
7) Suponha: 1º. mês

$$\Pi^* = 6{,}0\%\ \text{a.a.}$$
$$r = 12{,}00\%\ \text{a.a.}$$
$$n = 21\ \text{du}$$

2º. mês

$$\Pi^* = 5{,}8\%\ \text{a.a.}$$
$$r = 12{,}00\%\ \text{a.a.}$$
$$n = 20\ \text{du}$$

Monte o PU para uma LTN emitida no 5º. dia útil do primeiro mês, com vencimento no 12º. dia útil do segundo mês.




1º. mês - 17 dias =

2º. mês - 11 dias =

28 dias =

**R: 981,195099**

8) Uma LTN rendeu 18% a.a. no prazo de 28 dias corridos (21 dias úteis). Qual o PU pago?

**R: 986,301816**

9) Uma LTN foi adquirida por 987,616695 com 20 dias úteis do seu vencimento. Qual a rentabilidade anual embutida?

**R: 17% a.a.**

10) Uma LTN foi emitida por 987,353880, com prazo de 21 dias úteis (30 dias corridos).

Calcule:

a) O PU na curva no quarto dia útil.
b) O PU na curva no décimo segundo dia útil.

Suponha que no décimo segundo dia útil, a taxa de mercado era de 14,50% a.a.

c) Qual o PU de mercado naquela data?
d) Qual a rentabilidade que o detentor tinha em vista quando adquiriu o título?
e) Qual a rentabilidade que o detentor inicial auferiu com a venda do título no $12^{O}$. dia útil, a preço de mercado?

a)

**R: 989, 150634**

---

b)

**R: 993,957966**

---

c)

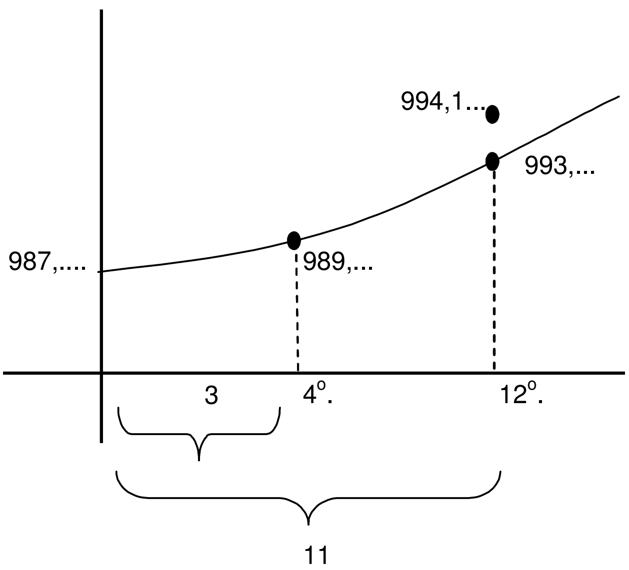
**R: 994,641210**

d)

**R: 16,50% a.a.**

e)

**R: 18,35% a.a.**



11) Suponha uma LTN emitida no primeiro dia útil de um mês com 20 dias úteis (mês inteiro) por 987,215840. No mesmo dia foi emitida outra LTN com 40 dias úteis de prazo (dois meses inteiros) por 976,030079. Sabendo que a taxa de juro real é de 12% a.a. no primeiro mês e de 11% a.a. no segundo, calcule:

a) A taxa efetiva no primeiro mês

b) A taxa de inflação esperada no 1º. mês

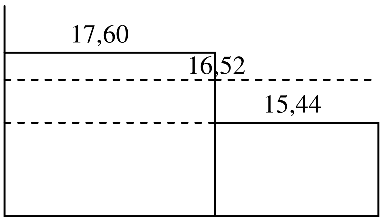
c) A taxa média dos dois meses e a taxa efetiva do 2º. mês

anualizando vem =

ou

Taxa média de 2 meses

ou




**<u>R: a) 17,60% a.a. b) 5% a.a. c) 15,44% a.a.</u>**

## *14.10 Certificado de Depósito Bancário*

1) CDB PÓS

IR = 15%
$V_a$ = 1.000.000
r = 15% a.a.
$TR_{acum}$ = 1,7427% no período
dc = 120
du = 84
$V_{rl}$ (valor de resgate líquido) = ?
$i_L$ ( taxa líquida) = ?

**R: $V_{RL}$ = 1.056.055,49; $i_L$ = 11,83% a.a.**

2) Uma DTVM adquiriu um CDB pós por R$ 1.000.000,00. O resgate ocorreu 120 dias depois por R$ 1.056.096,25. Sabendo que a TR acumulou 0,8024% no período, calcule a taxa real do CDB.

**R: 15% a.a.**

3) CDB Pré
Em 01/07/2002, uma corretora comprou um CDB de R$ 50.000.000,00 com vencimento em 03/08/2002, com rentabilidade de 25% a.a. No dia 13/07/2002 a corretora vendeu o título para uma DTVM à taxa de 20% a.a.

a) Calcule o preço de venda
b) Calcule a taxa nominal do item anterior

c) Calcule o valor contábil do título em 31/07, considerando que o papel continuava na carteira da DTVM.
d) Determine o valor de mercado do título em 31/07, considerando que a taxa de emissão do CDB na data era de 18% a.a.?

Prazo entre a data da venda e o vencimento - 21 dias corridos
Dias úteis: na corretora 8 e na DTVM 15

Respostas:
a)

**R: R$50.493.387,94**

---

b)

**R: 34,26% a.a.**

---

c)

**R: R$50.955.794,05**

---

d)

**R: R$50.962.931,39**

4) CDB PÓS
Em 11/08/2005 um banco comprou um CDB PÓS de R$ 30.000.000,00 com vencimento em 09/11/2005 e rentabilidade de 12,50% a.a. + TR. O prazo do CDB é de 90 dias corridos.

a) Calcule o PU do CDB na curva do papel em 31/08/2005 (20 dias corridos), sabendo que a TR no período acumulou 1,15042966%.

b) Sabendo que em 31/08 a taxa de mercado do CDB passou para 10% a.a., calcule o $PU_M$ naquela data.

c) Qual a rentabilidade no caso de venda do CDB?

## *14.11 Séries Uniformes de Pagamento*

1) Você está pensando em comprar um novo veículo no valor de R$ 30.000,00, mas surge uma oportunidade de adquirir um consórcio, com uma carta de crédito daquele valor, por R$ 21.500,00 mais 20 parcelas mensais de R$ 575,00, vencendo a primeira em um mês.

Considere: R$ 21.500,00 é exatamente o que você dispõe para dar entrada no financiamento. A taxa média do mercado para financiamento é de 3,5% a.m. Os veículos têm sofrido aumentos semestrais em torno de 3%, estando o próximo para acontecer no mês corrente.

Do ponto de vista econômico e com base nesses parâmetros, qual é a melhor opção de compra: consórcio ou financiamento?

**Pela HP-12C**

| DADOS | TECLA FUNÇÃO | VISOR | COMENTÁRIOS |
|---|---|---|---|
| Registros | <f><CLEAR><REG> | | limpar |

**R: Como 3,5 < 3,73, ............**

2) Um empresário adquiriu equipamentos no valor de R$36.000,00, a serem pagos em 36 prestações mensais e iguais, com taxa de juros de 1,8% a m (JC). Determinar o valor das prestações, caso a primeira seja paga:

- **Um mês após a compra** **R: R$1.367,42**
- **À vista** **R: R$1.343, 24**

3) Uma loja contraiu um financiamento de R$10.000,00 a ser pago em 12 prestações mensais e iguais de R$1.000,00. Determinar a taxa mensal de juros do empréstimo.

**R: 2,92% a.m.**

4) Um investidor adquiriu um título que rende 6 prestações semestrais de R$15.000,00, com a primeira vencendo 1 semestre após a compra. Determinar o valor do investimento, sabendo que a taxa de juros é de 8% a s.

**R: R$69.343,19**

5) Um estudante comprou um carro por R$20.000,00, sendo R$5.000,00 de entrada e mais 15 parcelas mensais "sem juros" de R$1.000,00, vencendo a primeira um mês após a compra. Determinar a taxa mensal de juros implícita no financiamento, sabendo que o estudante poderia ter adquirido o veículo com desconto de 10% se o pagamento fosse à vista.

**R: 1,84% a.m.**

6) Um empresário tomou um financiamento de R$50.000,00 para ser pago em 12 prestações mensais e iguais, a uma taxa de 2% a m . Imediatamente após o sexto pagamento, o empresário propôs uma renegociação ao banco, que aceitou financiar em 18 prestações mensais adicionais, todas de mesmo valor, a serem pagas a partir do final do sétimo mês. Determinar o valor das novas prestações, sabendo que a taxa de juros da operação permanece em 2% a m.

**R: R$1.766,50**

7) Um operário realizou 4 depósitos iguais e sucessivos no final de janeiro, fevereiro, março e abril. NO final de dezembro, o total acumulado era de R$10.000,00. Determinar o valor dos depósitos efetuados, sabendo que o banco lhe ofereceu taxa de juros de 0,5% a m.

**R:R$2.384,27**

8) Um estudante foi agraciado com uma bolsa mensal de estudos no valor de R$1.000,00, recebidos no final de um dos 24 meses de seu mestrado. Após o término do curso, o estudante deve ressarcir a agência que concedeu a bolsa através do pagamento de 48 prestações mensais e iguais. Determinar o valor dessas prestações, sabendo que a taxa de juros é de 1% a m.

**R: R$710,31**

9) Um pai resolveu depositar R$ R$ 1.000,00 no final de cada um dos próximos 18 anos para pagar a universidade do filho. A universidade cobra uma anuidade no começo de cada ano e promete manter a prestação fixa durante os 4 anos do curso. Qual deve ser o valor máximo da anuidade de modo que as prestações depositadas, aplicadas a 12% a.a. sejam suficientes para pagar o curso.

a) VF dos depósitos anuais $\Rightarrow$

b) Com VP = 55.749,71 e i = 11% a.a., qual PMT em 4 anos?

se antecipado =

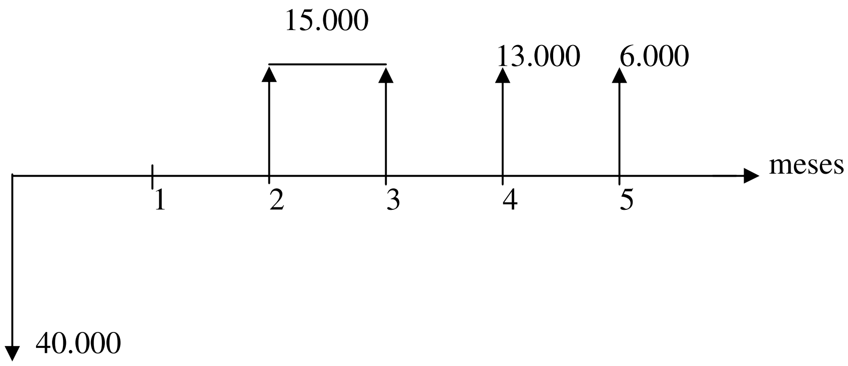
**R: a) VF = 55.749,77 b) $VP_{ant}$ = 16188,83 / $VP_{post}$ = 17969,60**

## *14.12 Valor Presente Líquido e Taxa Interna de Retorno*

1) Determinar o VPL de um projeto que custa hoje R$ 40.000,00 e gera quatro fluxos de caixa mensais positivos em n=2, n=3, n=4 e n=5 meses com valores de R$ 15.000,00, R$ 15.000,00, R$ 13.000,00 e R$ 6.000,00, respectivamente.

A taxa mínima de atratividade é de 8% a.m.

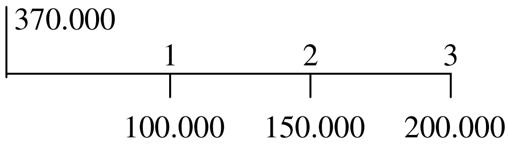
Você investiria neste projeto? Por que?

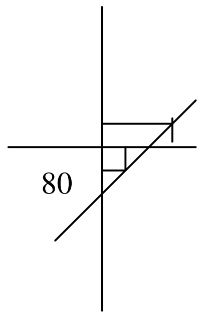



**Pela HP-12C**

**R: VPL = - 1.593,55, logo: ..................**

2) Uma instituição financeira propôs conceder a uma empresa um empréstimo de R$370.000,00, a ser devolvido em três pagamentos consecutivos mensais de R$100.000,00, R$ 150.000,00 e R$ 200.000,00. Considerando que a melhor taxa máxima de atratividade da empresa é 10% a.m. para tomar empréstimo, calcule a TIR e o VPL.




**Pela HP-12C**

DADOS TECLA FUNÇÃO VISOR COMENTÁRIOS

**<u>R: VPL = 4.861,01; TIR = 9,33 %</u>**